

5-A 673.03

23/4

Library of the Museum  
OF  
COMPARATIVE ZOÖLOGY,  
AT HARVARD COLLEGE, CAMBRIDGE, MASS.

Founded by private subscription, in 1861.



No. 7026

Sept. 25, 1882 - July 25, 1883









**Archiv**

*Pp. 117-128 dupl.  
119-120, 121-122  
occur 3 times*

for

# Mathematik og Naturvidenskab

Udgivet

af

**Sophus Lie, Worm Müller og G. O. Sars.**

---

Syvende Bind.



**Kristiania.**

Forlagt af Alb. Cammermeyer.

*hm*  
1882.

Archiv

Mathematisk og Naturvidenskabelig

Udsat

Rechner des Herrn Müller v. G. O. 2012

Rechner des Herrn Müller v. G. O. 2012



Kristiania

Det Mallingske Bogtrykkeri.

61.25.1882.

# Archiv

for

## Mathematik og Naturvidenskab.

Udgivet

af

Sophus Lie, Worm Müller og G. O. Sars.

---

Syvende Bind. Første Hefte.



Kristiania.

Forlagt af Alb. Cammermeyer.

1882.



## Avertissements.

**Die Natur.** Zeitung zur Verbreitg. naturwissenschaftl. Kenntniss u. Naturanschaug. für Leser alle Stände. Organ d. „Deutschen Humboldt-Vereins“. Hrsg. v. Dr. Karl Müller, Halle. Pr. pr. Aarg. (ugentl. No.) Kr. 17.60. Uddr af Indh. Das zwölfte Stiftungsfest des Breslauer Physikalischen Vereines. Paläontologische Mittheilungen: Ueber die in Meteoriten entdeckten Thierreste. Aus dem Norwegischen deutsch von E. Jonas. Die Fortschritte der Spektralanalyse. Die elektromagnetische Strömung durch ein Experiment als Aetherströmung. Zur Pflanzenmystik. Botanische Mittheilungen: „Grundzüge einer vergleichenden Morphologie der Orchideen“. Reisen und Reisende. Die Leichhardt'schen Reliquien. Die Berge d. Ober-Engadin. Zur Sonnenphysik. Das Mineralöl „Vaseline“. Die Auffindung von Spuren Ludw. Leichhardt's. Eine leicht transportable meteorolog. Station. Die Farben d. Himmels. Die Wirkungen d. Lichtes. Eine vorgeschichtl. Begräbnisstätte. Gibt es Pflanzenbewachsene Thäler u. Rennthiere im Innern Grönland? Zur Irrlichterfrage. Beitr. zur Thier- Seelenkunde. Gutta cavat lapidem groszen Kometen. Schilderungen d. Natur v. d. Pflanzenlebens im westl. gebirgigen Norwegen von A. Blytt. Bernard Palissy. Ein neues telephonisches System von Prof. Dolbear. Welche Dienste könnte d. Afrikareisende der Herpetologie u. Ampibiologie nach leisten? Der Bergkette d. Pilz Julier im Ober-Engadin. Die Zukunft d. Urbewohner Australiens. Ueber d. Haltung d. Bienen in groszen Städten. Neue Original-Mittheilungen über Leichhardt'schen Spuren durch Skuthorpe. Die Ruinenstädten Mittelamerika's. Die Bewegungen d. Pflanzen. Ein Besuch beim Siebenwasserfall im Südamerika. Andersohn's theilbarer Globus, Demonstrations-Apparat, Hilfsmittel zur Naturforschung als Begründung d. Lehre „vom Massa druck aus der Ferne“. Ueber d. Einwirkg. d. Vocaltöne auf die Farbenringe d. Quecksilberbades. Der Elephant im Dienste d. Afrikareisenden. Baume, welche ihre Rinde abwerfen. Wie rauch dem Menschheit u. seit wann? Ueber einige Meeres-Erscheinungen. Die Ursache d. Phosphoreszenz d. sogenannten „leuchtenden Materie“ nach vorangegangener Isolation. Naturwissenschaftl. Notizen aus Algerien. Die Nester d. europäischen Bienenarten u. Ameisen. Philodendron pertusum als Zimmerpflanze. Ueber d. Verstümmeln d. Holzgewächse durch Beschneiden. Die deutschen Pflanzennamen in ihrer Bedeutg. f. d. Geschichts in Alterthumskunde. Die Nester d. europäischen Bienenarten. Die Butter u. ihre Verfälschungen. Zur Frage d. schlagenden Wetter. Eine neue astronomische Relation zwischen Gravitation u. Rotation d. Weltkörper. Im Gneissgebiete Tirols. Die Ignasosphen d. Bückeberges. Ueber d. Tönen d. Körper unter dem Einflusse intermittirender Bestrahlung. Ein neuer Fundort d. Ignasodon-Fährten. Die Luftelektrizität u. ihr Einflusz auf d. Wachstum d. Pflanzen. Neue „subjektive Farbenwahrnehmungen“ auf Grund von Kontrastwirkung. Die Mechanik d. intermitterenden Quellen. Ueber die gegen Thiere u. Gewächse geübte Methode d. Verstümmelung. Der javanische Kalender. Ueber den

a  
REVISION AF GRUPPEN:

## ISOPODA CHELIFERA

MED CHARAKTERISTIK AF NYE HERHEN HØRENDE ARTER OG SLÆGTER

AF

G. O. SARS.

De saakaldte *Sax-Isopoder* («Scheerenasseln») danner en i mange Henseender meget eiendommelig og interessant Krebsdyrgruppe, om hvis systematiske Stilling der synes at herske adskillig Uenighed blandt Zoologerne.

Medens Milne-Edwards<sup>1)</sup> og efter ham de fleste senere Zoologer henfører dem til Isopodernes Underorden som en egen anomal Familie (Asellotes hétéropodes), har enkelte nyere Forskere, f. Ex. Gegenbaur<sup>2)</sup> paa Grund af visse karakteristiske Eiendommeligheder ganske skilt dem ikke blot fra Isopoderne, men fra hele Afdelingen Arthrostraca (Edriophthalmata), og henført dem til den anden store Afdeling af Malacostraceerne, de saakaldte Thoracostraca (Podophthalmata). Dana<sup>3)</sup> holder paa en Maade Middelveien mellem disse 2 Anskuelser, idet han opfører de her omhandlede Crustaceer tilligemed nogle andre aberrante Former (Anthuræ, Anceus og Liriope) som en egen Underorden, *Anisopoda*, tilhørende Ordenen *Tetradecapoda*, der svarer til Arthrostraca eller Edriophthalmata.

I sit fortjenstfulde Arbejde over denne Gruppes skandinaviske Former<sup>4)</sup> har Prof. Lilljeborg paavist det mindre naturlige

<sup>1)</sup> Histoire naturelle des Crustacés.

<sup>2)</sup> Grundriss der vergleichenden Anatomie, 2te verbesserte Aufgabe.

<sup>3)</sup> Unitet States Expl. Exped. Crustacea.

<sup>4)</sup> Bidrag til kännedomen om de inom Sverige och Norrige förekommande Crustaceer af Isopodernas underordning och Tanaidernas familj.



i den ovenantydende Sammenstilling af Dana, idet Slægten *Liriope* aabenbart maa henføres til Bopyriderne, medens de 2 øvrige Slægter *Anthura* og *Anceus* viser en større Affinitet til *Cymothoiderne*, omend enhver af disse Slægter maa danne Typer for særegne Familier.

Tilbage bliver altsaa af Danas Anisopoder kun de egentlige chelifere Former med de 2 længst bekendte Typer *Apseudes* og *Tanais*. Lilljeborg henfører disse to Slægter til en og samme Familie, *Tanaidæ*, hvilken stilles i systematisk Henseende æquivalent med de øvrige indenfor Isopodernes Underorden opstillede Familier.

De navnlig ved Fritz Müllers og Dohrns Undersøgelser næiere præciserede mærkværdige Eiendommeligheder, som udmærker de her omhandlede Crustaceer ligeoverfor de øvrige Isopoder, synes mig dog at være af den Betydning, at de nødvendiggjør en skarpere Adskillelse fra disse, og skjøndt jeg ikke kan gaa saa vidt som Dana eller Gegenbaur og ganske udskille dem af Isopodernes Underorden, tror jeg dog at maatte betragte dem som repræsenterende en egen anomal Tribus, der i enkelte Henseender unægtelig danner et Slags Bindeled mellem Arthrostraca og Thoracostraca. Ligeledes skulde jeg være meget tilbøielig til at dele den af Fritz Müller og Dohrn fremsatte Anskuelse, at de her omhandlede Crustaceer, maa antages at have for en Del bevaret den oprindelige Organisation, der efter al Rimelighed karakteriserede de gamle Stamformer, hvorfra begge de nævnte Afdelinger har taget sit Udspring. Der er en anden eiendommelig Krebsdyrgruppe, som jeg ved denne Leilighed tror at maaatte henpege paa, fordi den synes at indtage en endnu mere udpræget intermediær Stilling mellem de to ovenanførte større Afdelinger, og det er *Cumaceerne*. Skjøndt disse anomale Krebse i den ydre Habitus ingensomhelst Lighed har med Isopoder og i denne Henseende meget mere ligner de egentlige Thoracostraca, er det dog ubestrideligt, hvad der allerede af Dohrn er paapeget, at der hos dem i visse Organisa-



tionsforhold findes en paatagelig Overensstemmelse med de til den her omhandlede Isopodetribus hørende Former. Den af Milne Edwards for Slægten *Rhoëa* (Apseudes) fremhævede Overensstemmelse med Amphipoderne synes mig derimod langt ringere og indskrænker sig i det høieste til en vis habituel Lighed.

Som den for nærværende Tribus mest karakteristiske Eiendommelighed ligeoverfor de øvrige Isopoder, maa unegtelig ansees Respirationens Lokalisering i den forreste Del af Forkroppen, hvor der findes paa hver Side en af et Slags Rygskjold (carapax) dækket tydelig Gjellehule, i hvilken en bagfra fortil gaaende Vandstrøm underholdes ved Hjælp af et eiendommeligt membranøst Vedhæng, hvis Sammenhæng med Kjævefødderne jeg tror at kunne paavise, og dermed ogsaa dets fuldstændige Homologi med Gjelleapparatet hos Cumaceerne og med den til 1ste Par Kjævefødder hos *Lophogaster* og *Mysiderne* fæstede membranøse Epignath. Det eiendommelige børstebesatte Appendix, der hos Apseudes findes fæstet til 2det Par Antenner, viser ogsaa hen paa høiere Typer, idet det saavel ifølge sin Plads som Bygning tydeligt nok svarer til Antennebladet hos de egentlige Podophthalmier, ligeledes de hos samme Slægt med 2 tydelige Svøber forsynede 1ste Par Antenner og det ved Basis af de 2 første Fodpar fæstede lille toleddede Appendix, hvis Betydning som en rudimentær Exopodit er utvivlsom. Endelig er der en Karakter, der ikke blot tilkommer Slægten Apseudes, men ogsaa enkelte Former af den anden Type, *Tanais*, og det er Øinenes Beliggenhed paa tydeligt adskilte og efter Frits Müllers Angivelser til og med undertiden bevægelige Fortsatser, noget der ligeledes indenfor Arthrostracernes Orden er ganske fremmed. Trods disse vistnok meget væsentlige Angivelser kan jeg dog ikke bekvemme mig til i Lighed med enkelte nyere Forskere at skille dem ud fra Isopoderne, med hvilke de baade i sin ydre Habitus og ved mange andre Karakterer viser en paatagelig Overensstemmelse.

Da jeg har havt Anledning til at undersøge et ikke ube-

tydeligt Antal af herhen hørende Former baade fra Middelhavet og Nordhavet og af alle disse har foretaget en saavidt muligt fuldstændig anatomisk Undersøgelse, tror jeg, at en nøiere Revision af de tidligere kjendte Arter og en kort Karakteristik af de nye i Forbindelse med en mere præcis systematisk Gruppering, ikke vil savne Interesse.

Jeg betragter de 2 tidligst opstillede Slægter *Apseudes* og *Tanais* som Repræsentanter for to distinkte Familier og kan under enhver af disse Familier, navnlig den sidste, opføre flere vel begrænsede Slægtstyper.

Undersøgelsen af Munddelene hos de egentlige Tanaider er vistnok paa Grund af disse Dyrs ringe Størrelse og forholdsvis haarde Integumenter forbunden med store Vanskeligheder, men lader sig dog ved passende Hjælpemidler og den tilstrækkelige Omhu meget godt praktisere selv med de mindste Former. Det har herved været mig muligt at paavise, navnlig i Mandibulernes Struktur karakteristiske og fuldkommen konstante Eendommeligheder, der aabenbart maa tillægges generisk Værdi.

Ved Siden heraf er naturligvis ved Slægternes Opstilling ogsaa taget Hensyn til andre eiendommelige Strukturforhold, hvorved det endog har været mig muligt i de allerfleste Tilfælde at kunne indordne ogsaa de af tidligere Forskere beskrevne, men ikke af mig selv undersøgte Former under de respektive Slægter.

Den mærkelige, først af Fritz Müller paaviste Forskjel mellem begge Køn hos de inden Tanaidernes Familie hørende Former, finder jeg ogsaa i flere Henseender anvendelig ved den generiske Adskillelse, da Kjønsskjellen ofte er meget forskjellig udtrykt hos de forskjellige Slægter.

Den af Fritz Müller omtalte Dimorphisme hos Hannerne af en og samme Tanaisart finder jeg dog efter de af mig anstillede Undersøgelser i høj Grad tvivlsom, og er jeg tilbøielig til at anse de to af nævnte Forsker omtalte Hanformer («Riecher» og «Packer» som hver tilhørende distinkte Tanaideslægter. Den

store Lighed, som faktisk eksisterer i den ydre Habitus mellem Hunner tilhørende helt forskellige Slægter indenfor Tanaidernes Familie, vil meget let kunne foranledige en Misforstaaelse af den nævnte Art. Hos ingen af vore nordiske Former har jeg nogensinde observeret nogen saadan Dimorphisme af Hannerne, naar afsees fra den Forskjel, der, som sædvanligt, bestaar mellem de yngre og endnu ikke slægtsmodne Hanner og de fuldt udviklede.

Nedenfor meddeles en systematisk Oversigt over alle hidtil bekjendte til denne Tribus hørende Arter tilligemed latinske Diagnoser af den hele Tribus, Familierne, Slægterne og de af mig selv undersøgte Arter.

I en følgende Afhandling agter jeg at levere udførlige Beskrivelser og Afbildninger af de i Middelhavet af mig indsamlede Arter. Vore indenlandske Former vil blive nærmere omtalte og afbildede i et faunistisk Arbejde over Norges Crustaceer, som jeg for Tiden har under Forberedelse.



Dispositio systematica specierum omnium hucusque cognitarum.

Ordo: **Arthrostraca.**

Subordo: **Isopoda.**

Tribus: **Chelifera.**

Familie 1. **Apseudidæ:**

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| Gen. 1. <i>Apseudes</i> , Leach. | Gen. 2. <i>Parapseudes</i> , n.  |
| 1. talpa (Mont.).                | 1. latifrons (Grube).            |
| 2. spinosus (M. Sars).           | Gen. 3. <i>Sphyrapus</i> Norman. |
| 3. tenuimanus, n.                | 1. anomalus G. O. Sars.          |
| 4. echinatus, n.                 | 2. serratus, n.                  |
| 5. Latreillii, (Edw.).           | 3. tudes Norman.                 |
| 6. acutifrons, n.                | 4. malleolus Norman.             |
| 7. robustus, n.                  |                                  |
| 8. tricornis, Norm.              |                                  |
| 9. gracilis Norm.                |                                  |

Familie 2. **Tanaidæ:**

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| Gen. 1. <i>Tanais</i> Edw.       | 6. rapax Harger.                 |
| 1. vittatus (Rathke).            | 7. filum (Stimpson).             |
| 2. Cavolinii Edw.                | Gen. 3. <i>Heterotanais</i> , n. |
| 3. Dulongii (Audouin).           | 1. Ørstedii (Krøyer).            |
| 4. novæzealandiæ Thomson.        | 2. anomalus, n.                  |
| Gen. 2. <i>Leptochelia</i> Dana. | 3. limicola (Harger).            |
| 1. Savignyi (Krøyer).            | 4. tenuis (Thomson).             |
| 2. dubia (Krøyer).               | Gen. 4. <i>Paratanais</i> Dana.  |
| 3. neapolitana, n.               | 1. Batei, n.                     |
| 4. minuta Dana.                  | 2. elongatus Dana.               |
| 5. brasiliensis (Dana).          |                                  |

- Gen. 5. *Typhlotanais*, n.
1. tenuimanus (Lilljeb.).
  2. æqviremis (Lilljeb.).
  3. brevicornis (Lilljeb.).
  4. finmarchicus, n.
  5. assimilis, n.
  6. tenuicornis, n.
  7. michrocheles, n.
  8. cornutus (G. O. Sars).
  9. penicillatus, n.
  10. messinensis, n.
- Gen. 6. *Leptognathia*, n.
1. longiremis (Lilljeb.).
  2. breviremis (Lilljeb.).
  3. brevimana (Lilljeb.).
  4. filiformis, (Lilljeb.).
  5. laticaudata, n.
  6. manca, n.
7. gracilis (Krøyer).
8. graciloides (Lilljeb.).
9. rigida (Sp. Bate).
10. coeca (Harger).
- Gen. 7. *Pseudotanais*, n.
1. forcipatus (Lilljeb.).
  2. macrocheles, n.
  3. Lilljeborgii, n.
  4. mediterraneus, n.
- Gen. 8. *Cryptocope*, n.
1. abbreviata (G. O. Sars).
  2. Vöringii, (G. O. Sars).
- Gen. 9. *Haplocope*, n.
1. angusta, n.
- Gen. 10. *Strongylura*, n.
1. cylindrata, n.
- Gen. 11. *Anarthrura*, n.
1. simplex, n.

## Characteres

tribus, familiarum, generum et specierum.

### Tribus: **Isopoda chelifera.**

Corpus plus minusve angustum, subdepressum vel subcylindricum, von nero compressum.

Caput cum segmento 1mo thoracico coalitum qvasi carapacem brevem formans postice utrinque cavitatem branchialem obtegens.

Segmenta corporis antici 6 libera bene disjuncta apparent.

Corpus posticum plerumque in segmenta 6 divisum, 5 anteriora brevia, subæqualia, ultimum illis majus.

Oculi nunc distincti in lobis discretis ad angulos anteriores capitis siti, nunc obsoleti.

Antennæ 1mi paris simplices vel bifurcatæ; 2di paris illis minores et infra easdem orientes.

Labrum lobum minutum quadrangularem formans; labium sat magnum, laminare, lobos 4 superpositos præbens.

Mandibulæ structura diversa, nunc palpigeræ, nunc simplices.

Maxillæ 1mi paris epignatho retro vergente setoso ornatae; 2di paris nunc distinctæ, pilosæ, nunc omnino rudimentariæ, nudæ.

Maxillipedes magni, basi connati, lobo incisivo brevi et palpo 4-articulato, incurvato instructi, epignathum præterea præbentes magnum membranaceum in cavitatem branchialem porrectum.

Pedes 1mi paris validi, antice porrecti, chela plerumque bene evoluta terminati; 2di paris nunc ceteris dissimiles, fossorii, nunc ut sequentes tenues, ambulatorii.

Pleopoda plerumque bene evoluta, inter se similia, natatoria, raro in femina rudementaria vel omnino carentia.

Uropoda terminalia, teretia, simplicia vel biramea.

Cor per corpus anticum usque ad segmentum caphalicum prolongatum.

Vasa biliaria solummodo 2 angustissima.

Ganglia et corporis antici et postici discreta, non coalita.

Ova et embryones in marsupio ventrali inclusa.

Pullus nuper exclusus pedibus ambulatoriis ultimi paris et pleopodis omnibus carens.

---

### Fam. 1.

### **Apseudidæ.**

Corpus subdepressum, postice attenuatum, segmento cephalico magno et lato, lateraliter carinato, fronte lamellari medio plus minusve producto, lobis ocularibus plerumque bene definitis.

Segmenta libera corporis antici epimeris minutis discretis instructa.

Antennæ 1mi paris intervallo majore disjunctæ, ad angulos



exteriores capitis orientes, pedunculo 3-articulato flagellisqve 2 multiarticulatis instructæ; 2di paris illis multo minores, appendiculatæ vel simplices, flagello distincto, multiarticulato terminatæ.

Mandibulæ magnæ palpo distincto 3-articulato et processu molari bene evoluto præditæ.

Maxillæ 1mi paris ramis 2 incisivis et epignatho setifero biarticulato instructæ; 2di paris bene evolutæ, breviter lobatæ et setiferæ.

Epignathus maxillipedum (lamina branchialis) magnus, late ovatus, curvatus, appendice digitiformi ciliata terminatus.

Pedum paria 2 priora ceteris dissimilia; 1mum par distincte chelatum, ad basin valde instructum, tibia et tarso angustis; 2dum par fossorium, articulis ultimis dilatatis et compressis spinisque validis armatis; paria 5 sequentia ambulatoria, plus minusve hirsuta.

Pleopoda lamellis 2 longe setiferis instructa.

Uropoda birameæ, ramis tenuibus, filiformibus, multiarticulatis, inæqualibus, inferiore longissimo.

---

Gen. 1. **Apseudes**, Leach. 1813.

Eupheus, Risso.

Rhoëa, Milne Edwards.

Corpus plus minusve elongatum, in femina et mare forma et magnitudine eadem, segmento cephalico supine plerumqve distincte areolato, lamina frontali ad latera bene definita, leviter deflexa, medio producta, lobis ocularibus subpyriformibus.

Segmentum liberum 1mum epimeris antice porrectis, spiniformibus, insruetum.

Corpus posticum plus minusve hirsutum, segmento ultimo angusto ad apicem leviter productum.

Antennæ 1mi paris in femina et mare subsimiles, flagellis

inæqualibus, exteriori majore; 2di paris extus ad apicem articuli 2di lamella distincta setosa et mobili ornata.

Mandibulæ pone apicem dentatum aculeis tenuibus bi-trifurcatis instructæ, palpo bene evoluto et dense setifero.

Chelipedes in mare quam in femina robustiores, manu majore digitisque intus ex parte tuberculatis; pedes fossorii sequentibus valde dissimiles et multo fortiores. Et chelipedes et pedes fossorii ad basin appendice minuta biarticulata (exopodito rudimentario) instructi.

Pleopoda omnia bene evoluta, lamellis angustis uniarticulatis.

### 1. *Apseudes talpa* (Mont.).

*Concer gammarus talpa*, Montagu, Transact. Linn. Soc. Vol. IX. pg. 98, tab. IV, fig. 6.

*Apseudes talpa*, Leach. Transact. Linn. Soc. Vol. XI, pg. 372.

? *Eupheus ligioides*, Risso, Hist. nat. des Crust. des environs de Nice, pg. 124.

*Eupheus talpa*, Desmarest, Consid. gen. des Crustacés, pg. 285, tab. 46, fig. 9.

*Apseudes talpa*, Milne Edwards, Hist. nat. des Crustacés T. III, pg. 140.

*Apseudes talpa*, Sp. Bate & Westwood, British sessile eyed Crustacea T. II, pg. 148.

*Charact spec.* Corpus sat elongatum, latitudine maxima quintam longitudinis partem vix superante. Segmentum cephalicum magnum et latum supine distincte areolatum, lamina frontali triangulari, medio acuminata, lobis ocularibus ad apicem obtusis. Epimera segmenti 1mi liberi acuminata oblique antice vergentia. Segmenta sequentia corporis antici sensim angustiora, antice utrinque processu brevi triangulari instructa. Corpus posticum sat angustum, segmentis 5 prioribus lateraliter acuminatis pilisque longissimis plumosis obsitis, ultimo elongato ceteris

junctis longitudine fere æquali, utrinque eminentias 2 piliferas bene definitas præbente. Segmenta libera corporis antici breviter pilosa, omnia in medio faciei ventralis spina valida armata. Epistomum in fronte labri spinam similem antice porrectam præbens. Oculi distincti corneis bene conspicuis, pigmento pallido. Antennæ 1mi paris quintam corporis longitudinis partem vix superantes, articulo pedunculi 1mo ceteris 2 junctis plus duplo longiore, margine et externo et interno ex parte serrulato, flagellis pedunculo brevioribus, interiore 6-articulato, exteriore 13-articulato. Chelipedes feminae sat robusti, pedibus fossoriis vix minores, manu ovata carpo longiore, digito immobili intus prope basin tuberculo distincto armato. Pedes ambulatorii tenues ex parte spinosi, ultimum par setis longis plumosis obsitum. Uropoda dimidiam circiter corporis longitudinem æquantia, trunco extus setis pluribus ciliatis ornato, ramo externo 7-articulato vix quartam interni longitudinis partem æquante. Color albidus. Longit circiter 6 mm.

*Habitat* ad oras Britanniae meridionales (Montagu, Sp. Bate) in mari mediterraneo ad Nizzam (Risso) et ad Messinam (ipse), inque mari adriatico (Heller).

---

## 2. *Apseudes spinosus*, M. Sars.

*Rhoëa spinosa*, M. Sars, Chr. Vid.-Selsk. Forhandl. f. 1858.

*Apseudes talpa*, Lilljeborg, Bidrag til kännedomen om de inom

Sverige och Norrige förekommande Crustaceerna af

Isopodernas Underordning och Tanaidernas familj, pg. 9.

*Charact. spec.* Corporis forma et habitu antecedenti similis sed multo (plus duplo) major. Segmentum cephalicum ut in illo distincte areolatum, lamina frontali subcordiformi, marginibus lateralibus leviter concavis, lobis ocularibus ad apicem breviter acuminatis. Processus laterales segmentorum cor-



poris antici 5 posteriorum sat magni, acute triangulares. Corpus posticum dense pilosum, pilis vero quam in specie antecedente brevioribus et vix plumosis, epimeris segmentorum 5 priorum ad latera valde exstantibus, acuminatis. Segmentum terminale elongatum et angustum utrinque nodulos numerosos minutos piliferos præbens. Oculi minus distincti, corneis inconspicuis, pigmento albido. Antennæ 1mi paris sat elongatæ tertiam corporis longitudinis partem assequentes, articulo 1mo pedunculo apicem versus attenuato, parte modo dimidia posteriore marginis interioris serrulata, flagellis angustis et elongatis, interno 8—9-articulato, externo 16—20-articulato. Chelipedes feminae fere ut in *A. talpa*; maris robustissimi, manu permagna et tumida, digitis intus fortiter et irregulariter tuberculatis. Uropoda sat elongata ramo externo ex articulis circiter 12 composito. Color albidus. Longit. usque ad 13 mm.

*Habitat* ad Bahusiam (Lilljeborg) et oras Norvegiæ a sinu Christianiensi usque ad Finmarkiam occidentalem (M. Sars, Lilljeborg et ipse).

### 3. *Apseudes tenuimanus*, n.

*Charact. spec.* Corpus angustum et elongatum, latitudine maxima 5tam corporis longitudinis partem non assequente. Segmentum cephalicum magnum, supine distinctissime areolatum, utrinque leviter bilaciniatum, lamina frontali magna, subtriangulari, apice obtusiusculo, deflexo, lobis ocularibus antice in spinam acutam productis. Segmenta libera corporis antice forma et armatura fere ut in speciebus 2 antecedentibus, sed supine distinctius areolata. Epimera segmentorum corporis postici 5 priorum breviter acuminata et dense pilosa. Segmentum terminale antecedentibus junctis brevius, apicem versus leviter dilatatum, utrinque eminentias 2 piliferas, posteriorem minus distincte definitam, præbens. Oculi bene conspicui, pigmento

vero pallido. Antennæ 1mi paris mediocres, articulo 1mo pedunculi angusto et elongato, marginibus non serratis, flagello interno 4-articulato, externo 10-articulato. Chelipedes feminæ perangusti et debiles, pedibus fossoriis multo minores, carpo tenuissimo, lineari, manu illo brevior, digitis angustis palmæ longitudinem æquantibus, intus subtiliter serrulatis nullum vero tuberculum formantibus; maris multo robustiores, manu dilatata, digitis forcipatis, immobili ad basin profunde excavato medio tuberculum magnum et altum dentiformem præbente, digito mobili basin propius tuberculo singulo minore armato. Uropoda ramo externo brevissimo, trunco vix longiore, 3-articulato. Color albidus. Longit. vix 5 mm.

*Habitat* in mari mediterraneo ad Messinam (ipse).

#### 4. *Apseudes echinatus*, n.

*Charact. spec.* Corpus perangustum et elongatum, latitudine maxima sextam longitudinis partem parum superante. Segmentum cephalicum supine conspicue areolatum, utrinque distincte bilaciniatum, laciniis triangularibus, lamina frontali medio acutissime exserta utrinque profundius insinuata, fere trilobata, lobis ocularibus ad apicem in spinam acutam antice porrectam productis. Epimera segmenti liberi primi magna lateraliter porrecta. Segmenta sequentia instrictionibus profundis disjunctis, processibus lateralibus spiniformibus leviter antice curvatis instructa. Epimera segmentorum corporis postici 5 priorum spiniformia pilisque longis hirsuta. Segmentum terminale elongatum et angustum, apicem versus leviter dilatatum, in parte postica utrinque dente forti retro curvato armatum. Oculi minus distincti, pigmento albido. Antennæ 1mi paris perangustæ, articulo pedunculi 1mo apicem versus valde attenuato dente minuto marginis exterioris prope basin armato, flagello interno 7-articulato, externo 12-articulato. Chelipedes feminæ tenues et debiles,

pedibus fossoriis minores, manu angusta, digitis palma longioribus; maris paulo robustiores, manu latiore, digitis forcipatis armatura simili ac in specie antecedente. Uropoda ramo externo trunco paulo longiore, 3-articulato. Color albidus. Longit.  $8\frac{1}{2}$  mm.

*Habitat* in mari mediterraneo ad Speziam (ipse).

### 5. *Apseudes Latreillii*, (Edw.) Sp. Bate.

? *Rhoëa Latreillii*, Milne Edwards, Ann. des sciences nat. 1e série T. XIII, pg. 292.

*Apseudes Latreillii*, Sp. Bate & Westwood, British sessile eyed Crustacea T. II, pag. 153.

*Charact. spec.* Corpus minus elongatum, vix quinque longius quam latius, postice sensim attenuatum. Segmentum cephalicum supine leviter modo areolatum, lateribus æqualiter arcuatis, lamina frontali breviter cordiformi, lobis ocularibus ad apicem in spinam minutam productis. Epimera segmenti liberi 1mi haud longe producta. Segmenta sequentia corporis antici ad latera æqualiter arcuata spinis nullis. Epimera segmentorum corporis postici 5 priorum submutica et breviter pilosa. Segmentum terminale breve tertiam modo corporis postici longitudinis partem assequens, utrinque medio eminentia singula pilifera instructum. Epistomum inerme. Segmenta corporis antici absque spinis ventralibus. Oculi bene conspicui, pigmento pallido. Antennæ 1mi paris haud elongatæ, articulo pedunculi 1mo sat robusto, marginibus pilosis, non vero serrulatis, ultimo brevissimo, flagellis haud elongatis, interno 4-articulato, externo 8-articulato. Chelipedes feminae minus fortes, digitis intus dense pilosis, non vero tuberculatis; maris multo robustiores, digito utroque prope basin tuberculo obtuso armato. Pedes fossorii sat fortes spinis validis muniti; ambulatorii aense pilosi, articulis sat dilatatis, paribus 2 anterioribus sequentibus majoribus. Uropoda ramo



extermo brevi 3-articulato, interno ex articulis numerosis brevibus composito. Color albidus, pellucidus. Longit. circiter 6 mm.

*Habitat* ad oras orientales Angliæ (Norman, Sp. Bate) inque mari mediterraneo ad Golettam et Neapel (ipse).

---

#### 6. *Apseudes acutifrons*, n.

*Charact. spec.* Corpus subglabrum, sat elongatum, plus sexies longius quam latius. Segmentum cephalicum fere rectangulare supine indistincte areolatum, marginibus lateralibus integris, subrectis, lamina frontali medio in spinam acutam et elongatam exserta, lobis ocularibus minus distincte definitis, antice spina porrecta armatis. Epimera segmenti 1mi liberi perlonga et acuminata, oblique antice porrecta. Segmenta corporis antici 4 posteriora ad angulos anteriores et posteriores dente minuto armata. Epimera segmentorum corporis postici 5 priorum leviter producta et breviter pilosa. Segmentum terminale antecedentibus 3 junctis longitudine æquale, utrinque ante medium eminentia singula pilifera ornatum. Oculi inconspicui. Antennæ 1mi paris iisdem speciei antecedentis similes, articulis tamen 2 ultimis pedunculi magis elongatis. Chelipedes (feminæ) pedibus fossoriis multo minores, tenues et debiles, carpo angusto et elongato, manu illo brevior, digitis simplicibus. Pedes fossorii et ambulatorii fere ut in specie antecedente. Uropoda ramo externo brevissimo, biarticulato. Color albidus, Longit. 6 mm.

*Habitat* in mari mediterraneo ad Speziam, Neapel et Golettam (ipse).

---

#### 7. *Apseudes robustus*, n.

*Charact. spec.* Corpus sat robustum, vix 5ies longius quam latius, pilis sparsis et brevibus obsitum. Segmentum cephalicum

magnum, supine minus distincte areolatum, marginibus laterali-bus æqualiter arcuatis, lamina frontali late cordata, medio bre-viter acuminata, lobis ocularibus bene definitis, muticis. Epi-mera segmenti liberi 1mi brevia, obtuse conica. Segmenta corporis antici ad latera æqualiter arcuata, spinis vel dentibus nullis. Epimera segmentorum corporis postici 5 priorum mutica, dense et breviter pilosa. Segmentum terminale breve, tertiam corporis postici longitudinis partem vix superans utrinque emi-nentia singula sparse pilosa ornatum. Oculi distinctissimi et sat magni, corneis numerosis, pigmento vero pallido. Antennæ 1mi paris structura solita, articulo pedunculi 1mo sat magno, flagellis elongatis, interno 10-articulato, externo 16-articulato. Chelipedes (feminæ) pedibus fossoriis minores, articulo basali tamen sat tumefacto, carpo angusto, manu oblonga, digitis sim-plicibus palma brevioribus. Pedes fossorii robusti; ambulatorii quam in speciebus 2 antecedentibus angustiores. Uropoda in specimine singulo scrutato defecta. Color albidus, pellucidus. Longit. 7mm.

*Habitat* in mari mediterraneo ad Golettam (ipse).

---

8. **Apseudes tricornis**, Norman, M. S.

*Hab.*? (Exped. Brit.).

9. **Apseudes** (?) **gracilis**, Norman, M. S.

*Hab.*? (Exped. Brit.).

---

Gen. 2. **Parapseudes**, n.

Corpus minus elongatum, depressum, postice attenuatum, segmento cephalico magno supine vix areolato, lamina frontali ad latera minus distincte definita, medio non exserta, lobis ocu-laribus obtusis.

Segmentum liberum 1mum epimeris minimis non antice productis instructum.

Corpus posticum breve, sparse pilosum.

Epistomum spina forti antice porrecta armatum.

Antennæ 1mi paris pedunculo crasso, flagellis subæqualibus, multiarticulatis; 2di paris pedunculo brevi, lamella appendiculari minima et rudimentari.

Mandibulæ palpo minuto sparse piloso instructæ.

Chelipedes et pedes fossorii fere ut in genere antecedente, sed epipodito rudimentario carentes; pedes ambulatorii sat fortes, a fossoriis minus diversi et ut illi spinis validis marginis interioris armati.

Pleopodum solummodo 4 paria adsunt; ultimum par omnino obsoletum.

Uropoda structura solita.

---

### 1. *Parapseudes latifrons* (Grube).

*Rhoëa latifrons*, Grube, Die Insel Lussin und ihre Meeresfauna pg. 75.

*Charact. spec.* Corpus sat abbreviatum, latitudine maxima quartam longitudinis partem circiter æquante. Segmentum cephalicum supine leviter convexum, marginibus lateralibus integris, lamina frontali medio æqualiter arcuata, lobis ocularibus obliquis. Segmenta libera corporis antici ad latera æqualiter arcuata, spinis nullis; 3 anteriora posterioribus breviora. Corpus posticum segmentis 2 antecedentibus junctis longitudine æquale, epimeris segmentorum 5 priorum leviter acuminatis et postice curvatis. Segmentum terminale pentagonale, lateribus subrectis. Oculi distincti, pigmento obscuro. Antennæ 1mi paris tertiam fere corporis longitudinis partem æquantes, articulis pedunculi 2 prioribus sat magnis et crassis, ultimo minimo, flagellis pedunculi longitudinem assequentibus, interno 7-articulato, externo



8-articulato. Chelipedes mediocres carpo elongato et apicem versus dilatato, manu illo multo brevior, ovata, digitis brevibus, simplicibus. Pedes fossorii minus fortes, chelipedibus vix majores, apicem versus leviter attenuati multisque marginis interioris armati spinis. Uropoda dimidiam corporis longitudinem superantia, ramo externo 5-articulato, interno ex articulis numerosis (32) composito. Color albido-flavescens, fascia transversa rubro-fusca ad marginem posteriorem segmenti cephalici et alia in medio articuli basalis antennarum 1mi paris variegatus. Longit. vix 3 mm. superans.

*Habitat* in mari adriatico ad insulam Lussin (Grube) inque mari mediterraneo ad Speziam (ipse).

---

### Gen. 3. **Sphyrapus**, Norman, M. S.

Corpus feminae minus gracile, maris multo magis elongatum et angustum. Segmentum cephalicum magnum, supine leviter arcuatum, lamina frontali ad latera minus distincte definita, medio plus minusve exserta, lobis ocularibus minutis, triangularibus, ad angulos capitis sitis.

Segmentum liberum 1mum cum segmento cephalico firmiter conjunctum, epimeris obtusis, non antice productis; sequentia instrictionibus profundis disjuncta.

Corpus posticum breve, segmento terminali ceteris parum angustiore.

Antennae 1mi paris in femina et mare dissimiles, articulo pedunculi 1mo magno et dilatato, sublaminari, flagellis brevibus, inaequalibus. externo in mare ciliis sensitivis numerosis fasciculatis ornato; 2di paris tenuissimae, simplices, lamella appendiculari nulla.

Mandibulae palpo angusto sparse piloso instructae, processu molari tenui, cylindrico.

Chelipedes sat fortes, tibia et tarso angustis, manu valida et tumida, submalleolata, epipodito minuto ad basin ornati. Pedes fossorii robusti, articulis ultimis dilatatis et spinosis, epi-

podito carentes. Et chelipedes at pedes fossorii in mare adulto iisdem feminæ dissimiles et valde elongati. Pedes ambulatorii fossoriis multo debiliores.

Pleopoda omnia bene evoluta et longe setifera, lamella interna distincte biarticulata.

Uropoda structura fere ut in generibus 2 antecedentibus, sed minus elongata.

### 1. *Sphyrapus anomalus* (G. O. Sars).

*Apseudes anomalus* G. O. Sars, Undersøgelser over Christianiafjordens Dybvandsfauna, p. 45.

*Charact. spec.* Corpus feminæ vix quinqvies longius quam latius, segmento cephalico antice leviter attenuato, marginibus lateralibus integris, lamina frontali magna, rotundato-producta, medio breviter exserta, lobis ocularibus minimis et rudimentariis. Segmentum 1mum liberum lateraliter expansum et rotundatum; sequentia multo angustiora, inermia, ultimum antecedentibus multo brevius. Corpus posticum fere glabrum, epimeris rotundatis, non ad latera exstantibus. Segmentum terminale obtuse rotundatum, marginibus æqualiter arcuatis. Oculi omnino desunt. Antennæ 1mi paris feminæ qvartam corporis longitudinis partem æqvantes, articulo pedunculi 1mo magno, dimidiam antennæ longitudinem assequente, medio dilatato, ultimo minimo, flagellis pedunculo multo brevioribus, interno 3-articulato, externe 5-articulato; maris nonnihil longiores, flagello externo 7-articulato fasciculis densis ciliorum ornato. Chelipedes feminæ sat robusti, manu magna, submalleolata, tarso et tibia junctis longiore, digitis palmæ longitudinem æqvantibus; maris valde elongati articulo basali magno et tumido, tibia perangusto et elongata. Pedes fossorii chelipedibus longiores, tarso imprimis in mare valde elongato. Pedes ambulatorii tenuissimi et sparse pilosi. Uropoda corpore postico vix longiora, ramo externo brevi 3-articulato,

interno 10-articulato. Color albidus. Longit. feminae oviferae vix 4 mm; maris adulti 5 mm.

*Habitat* ad oras Norvegiae a sinu Christianiensi usque ad Vadsø (ipse).

---

## 2. *Sphyrapus serratus*, n.

*Charact. spec.* Antecedenti valde affinis, sed dignoscendus corporis forma paulo magis abbreviata, epimeris segmentorum 5 priorum corporis postici acuminatis et ad latera exstantibus, segmento terminali subtriangulari, medio leviter exserto, antenarum 1mi paris articulo basali angustiore et magis elongato, chelipedibus majoribus, manu validissima, digitis elongatis et acuminatis, palma longioribus. Longit. feminae 4 mm; maris 5½ mm.

*Habitat* in magno abyssu areae frigidae maris Norvegiae et glacialis ad Stat. 40, 51 & 353 Expeditionis Norvegiae.

## 3. *Sphyrapus tudes*, Norman, M. S.

*Hab.*? (Exped. Brit.).

## 4. *Sphyrapus malleolus*, Norman, M. S.

*Hab.*? (Exped. Brit.).

---

## Fam. 2.

## Tanaidæ.

Corpus sublineare, plus minusve angustum et elongatum, postice vix attenuatum. Segmentum cephalicum parum dilatatum, fronte anguste truncato, lobis ocularibus nunc discretis, nunc



obsoletis. Segmenta libera corporis antici æqualiter arcuata, inermia. Corpus posticum sæpius breve, antico non angustius.

Antennæ 1mi paris margini antico capitis affixæ, ad basin contiguæ, simplices, pedunculo bi- vel triarticulato, flagello in femina rudimentari, in mare plerumque bene evoluto, multiarticulato; 2di paris illis minores, non appendiculatæ, flagello rudimentari.

Mandibulæ palpo carentes structura diversa in diversis generibus.

Maxillæ 1mi paris ramo incisivo singulo angusto instructæ, epignatho tenui setis plerumque 2 terminato; 2di paris omnino rudimentares lobulos minutos nudos formantes.

Maxillipedes ad basin connati, epignatho plerumque angusto, falciformi.

Partes masticationis maris adulti sæpius plus minusve abortæ.

Chelipedes bene evoluti, in femina et mare interdum valde dissimiles, basi tumida non instricta, tibia et tarso latis, subcompressis, manu plerumque distincte chelata. Pedes ceteri ambulatorii, tenues et sparse pilosi.

Pleopoda plerumque distincta, lamellis 2 ovalibus, incurvatis, setiferis terminata.

Uropoda haud elongata, nunc simplices, nunc birameæ.

---

Gen. 1. **Tanais**, Milne Edw. 1829.

Crossurus, H. Rathke.

Corpus minus elongatum. segmento cephalico utrinque sat tumefacto, lobis ocularibus discretis, triangularibus ad angulos anteriores capitis sitis. Corpus posticum medio dilatatum ex segmentis modo 5 compositum, ultimo obtuso.

Antennæ 1mi paris in femina et mare similes, breves, pedunculo 3-articulato, flagello brevissimo et rudimentari; 2di paris illis vix minores.

Mandibulæ bene evolutæ, ramo insisivo porrecto, processu molari brevi et crasso, apice truncato cristis hispidis regulariter sculpto.

Epignathus maxillarum 1mi paris setis pluribus terminatus; maxillipedum sat magnus, semilunaris, marginibus dense ciliatis, apice tenuiter exserto.

Chelipedes feminæ robusti, manu ovata, digitis intus tuberculatis; maris multo majores, digitis subforcipatis. Pedes ambulatorii 1mi paris a ceteris paulo discrepantes, digito subulato, recto; paria sequentia illis breviora, ex parte spinosa, dactylo hamato, in paribus 3 posterioribus fortissimo et pectinatim dentato.

Pleopodum solummodo 3 paria adsunt, magna, trunco crasso setoso, lamellis latis et dense setiferis.

Uropoda brevia, simplicia, ramo singulo bi-vel triarticulato.

Marsupium feminæ laminis solummodo 2 permagnis segmento libero 4to affixis formatum.

### 1. *Tanais vittatus*, Rathke.

*Crossurus vittatus*, H. Rathke, Beiträge zur Fauna Norwegens, Acta Leop. Vol. XX, pg. 39, tab. 1, fig. 1—7.

*Tanais tomentosus*, Krøyer, Naturh. Tidsskr. Bd. IV, pg. 183.

— — Gaimard's Voyage, Pl. 27, fig. 2, n—q.

*Tanais vittatus*, Lilljeborg, Bidrag til kannedomen om de inom Sverige och Norrige förekommande Crustaceer af Tanaidernas familj, pg. 24.

— — Sp. Bate & Westwood, British sessile eyed Crustacea, II. pg. 125.

*Tanais vittatus*, Harger, Report on the marine Isopoda of New England pg. 418, Pl. XIII, fig. 81, 82.

*Charact. spec.* Corpus feminæ sat robustum, vix quinqvies longius quam latius, segmento cephalico sat magno ad latera

æqualiter arcuato, segmentis liberis instrictionibus conspicuis disjunctis; maris adhuc magis abbreviatum. Corpus posticum antico latius, segmentis 2 prioribus cinctura pilorum densorum ornatis, ultimo obtuse rotundato. Oculi distincti, pigmento nigro. Antennæ 1mi paris segmento chephalico multo breviores, dense pilosæ, articulo basali ceteris junctis longitudine æquali. Chelipedes validissimi, manu oblonga, carpo multo longiore, digitis feminae palma brevioribus intus in medio tuberculo singulo obtuso armatis, maris forcipatis, nudis. Uropoda dimidiam corporis postici longitudinem haud assequebantur, triarticulata. Corpus supine pigmento fusco-violaceo ornatum, in segmento cephalico picturam dense reticulatam, in segmentis liberis fascias transversas formante. Longit. usque ad 5 mm.

*Habitat* ad oras meridionales at occidentales Norvegiæ (Rathke, Krøyer, M. Sars, Lilljeborg et ipse), in freto Øresund (Krøyer), ad oras Britannia (Sp. Bate), adque oras orientales Americae borealis (Harger).

## 2. *Tanais Cavolinii*, Milne Edwards.

*Tanais Cavolinii*, Milne Edwards, Hist. nat. des Crustacés III, pg. 141, pl. 21, fig. 6.

— — Heller, Carcinologische Beiträge zur Fauna des adriatischen Meeres pg. 13.

*Charact spec.* Antecedenti simillimus, sed corpore paulo minus robusto, plus quinqvies longius quam latius, medio leviter coarctato. Segmenta corporis postici 2 priora ut in *T. vittato* cinctura pilorum ornato, 2 posteriora subito multo angustiora, ultimum medio obtuse productum. Antennarum 1mi paris articulus basalis ceteris junctis longior. Chelipedes quam in *T. vittato* minus robusti. Uropoda magis elongata in specimine singulo scrutato distincte 4-articulata. Corpus pigmento fusco-violaceo variegatum. Longit. speciminis scrutati 4.50 mm.



*Habitat* in mare mediterraneo ad Neapel (Edwards) et Messinam (M. Sars) inque mari adriatico (Heller).

---

### 3. *Tanais Dulongii*, (Audouin).

*Gammarus Dulongii*, Audouin, Explicat. Pl. Egypte, tab. XI, fig. 1 (fide Sp. Bate).

*Tanais Dulongii*, Milne Edwards, Hist. nat. des Crustacés, pg. 142.

— — Sp. Bate & Westwood, British sessile eyed Crustacea II, pg. 129.

*Habitat* in mari mediterraneo ad oras Ægyptiæ (Audouin) adque oras meridionales Angliæ (Sp. Bate).

### 4. *Tanais novæzealandiæ*, Thomson.

*Tanais novæzealandiæ*, Thomson, Ann. Nat. Hist. Ser. 5. Vol. 4.

*Habitat* ad oras Novæzealandiæ (Thomson).

---

## Gen. 2. *Leptochelia*, Dana 1849.

Corpus plus minusve elongatum, lineare, in mare quam in femina magis abbreviatum. Segmentum cephalicum antice æqualiter attenuatum, lobis ocularibus discretis. Corpus posticum antico non latius ex segmentis 6 compositum, 5 prioribus subæqualibus, ultimo obtuso.

Oculi distincti, corneis conspicuis et pigmento nigro instructi.

Antennæ 1mi paris feminae conicæ, sparse pilosæ, pedunculo 3-articulato, flagello rudimentari, maris multo magis elongatæ et angustæ, flagello multiarticulato fasciculisque ciliorum sensitivorum ornato.

Mandibulæ validæ, acie mandibulæ dextræ antice subtiliter serrata, processu molari permagno et crasso.

Epignathus maxillarum 1mi paris bisetosus; maxillipedum anguste falciformis, apice non exserto.

Partes masticationis omnes in mare abortæ.

Chelipedes feminæ validæ structura solita; maris valde elongati, carpo attenuato, manu permagna, oblonga, digitis elongatis et curvatis, subforeipatis, immobili intus fortiter tuberculato.

Pedes ambulatorii 1mi paris sequentibus paulo majores, dactylo elongato, setiformi, ceteri breviusculi, dactylo haud magno, simplici, ad apicem curvato, articulo basali parium 3 posteriorum sat tumefacto.

Pleopoda omnia bene evoluta in mare et femina similia.

Uropoda biramea, ramo externo minimo et rudimentari, uniarticulato, interno elongato, multiarticulato.

Marsupium feminæ lamellis 8 magnis de segmentis liberis 4 prioribus prodeuntibus formatum.

### 1. *Leptochelia Savignyi*, (Krøyer).

*Tanais Sagvinyi*, Krøyer, Nat. Tidsskr. Bd. 4, pg. 168, Tab.

II, fig. 1—12 ♀.

*Tanais Edwardsii*, Idem, ibid. pg. 174, Tab. II, fig. 13—19, ♂.

*Leptochelia Edwardsii*, Sp. Bate & Westwood, British sessile eyed Crustacea pg. 134. ♂.

*Leptochelia algicola*, Harger, Report on the marine Isopoda of New England (ex parte).

*Paratanais Savignyi*, Delage, Contribution à l'étude de l'appareil circulatoire des Crustacés édriophthalmes marins, pg. 134, Pl. XI, fig. 1—8.

*Charact. spec.* Corpus feminæ sat robustum, quinque circiter longius quam latius, lateribus subrectis; maris paulo magis abbreviatum et medio leviter coarctatum. Segmentum

cephalicum feminae magnum 3 sequentibus junctis longitudine aequale. Corpus posticum longitudine eadem, apicem versus leviter attenuatum. Oculi feminae haud magni, maris multo (plus duplo) majores, corneis distinctissimis. Antennae 1mi paris feminae segmento cephalico distincte longiores articulo ultimo pedunculi sutura mediana in segmenta duo diviso, basali ceteris junctis paulo longiore; maris dimidiam corporis longitudinem non assequentes, flagello 6-articulato pedunculo multo brevior. Chelipedes feminae robustissimi dimidiam corporis antici longitudinem superantes, manu carpo brevior; maris valde elongati, carpo angustato, manu oblonga carpo vix brevior, digitis ad apicem valde curvatis, immobili intus tuberculis 2 magnis a se remotis armato. Uropoda dimidiam corporis postici longitudinem vix assequentia, ramo interno 6-articulato. Color uniformiter albidus. Longit. feminae 2.80 mm; maris 2.10 mm.

*Habitat* ad insulam Madeiram (Krøyer), ad oras meridionales Angliæ (Sp. Bate), ad oras orientales Americæ borealis (Harger) inque mari mediterraneo ad Speziam, Messinam et Siracusam (ipse).

## 2. *Leptochelia dubia*, (Krøyer).

? *Tanais dubius*, Krøyer, Nat. Tidsskr. Bd. 4, pg. 178, tab. II, fig. 20—22.

— — Dohrn, Untersuchungen über Bau und Entwicklung der Arthropoden, tab. XII, fig. 6—18.

*Leptochelia algicola*, Harger, Report on the marine Isopoda of New England pg 421, tab. XII, fig. 80, tab. XIII, fig. 83—86.

*Charact. spec.* Antecedenti simillima, sed minor et corporis forma paulo minus robusta. Antennae 1mi paris feminae segmento cephalico breviores, articulo ultimo pedunculi simplici, angusto, non diviso; maris dimidiam corporis longitudinem

superantes, flagello 9-articulato pedunculo vix brevior. Chelipedes feminae quam in specie antecedente minus robusti dimidiam corporis longitudinem non assequentes; maris minus elongati, tuberculis digitis immobilis magis approximat. Uropoda dimidiam corporis postici longitudinem superantia, ramo interno 6-articulato. Longit. feminae 2.40 mm; maris 1.90 mm.

*Habitat* ad oras Brasiliæ (Krøyer), ad oras orientales Americæ borealis (Harger) inque mari mediterraneo ad Speziam, Messinam et Siracusam (Dohrn et ipse).

---

### 3. *Leptochelia neapolitana*, n.

*Charact. spec.* Corpus et feminae et maris sat elongatum et angustum, septies fere longius quam latius, segmento cephalico breviusculo, sequentibus 2 junctis brevior, posterioribus fere æque longis ac latis. Corpus posticum segmento cephalico longius, apicem versus vix attenuatum. Oculi in femina et mare magnitudine et structura simili. Antennæ 1mi paris feminae segmento cephalico vix longiores, pedunculo 3-articulato; maris dimidiam corporis antici longitudinem æquantes, flagello brevi, 5-articulato, tertiam pedunculi longitudinis partem parum superante. Chelipedes feminae haud magni, manu carpo et brevior et angustior; maris multo majores, dimidiam corporis antici longitudinem superantes, manu dilatata sed parum elongata, digito immobili medio profunde excavato vel processibus 2, inferiore majore et serrato armato. Dactylus pedum ambulatoriorum 1mi paris longissimus, articulo terminali multo longior. Uropoda sat elongata, corpus posticum longitudine fere æquantia, ramo interno 6-articulato. Longit. feminae 2.70 mm; maris 2.30 mm.

*Habitat* in mari mediterraneo ad Neapel (ipse).

---



4. **Leptochelia minuta**, Dana.

*Leptochelia minuta*, Dana, United States Expl. Exped. Crustacea. Bd. II pg. 800, tab. 53, fig. 5. ♂.

*Habitat* in oceano pacifico ad insulas Feejeenses (Dana).

---

5. **Leptochelia brasiliensis**, (Dana).

*Tanais (Paratanais) brasiliensis*, Dana, United States Expl. Exp. Crustacea Bd. II, pg. 797, tab. 53, fig. 3. ♀.

*Habitat* ad oras Brasilienses (Dana).

---

6. **Leptochelia rapax**, Harger.

*Leptochelia rapax*, Report on the marine Isopoda of New-England pag. 424, tab. XIII, fig. 89, 90. ♂.

*Habitat* ad oras orientales Americæ borealis (Harger).

---

7. **Leptochelia (?) filum**, (Stimpson).

*Tanais filum*, Stimpson, Marine Invertebrata of Grand Manan, pg. 43, ♀.

*Leptochelia filum*, Harger, l. c. pg. 426.

*Habitat* ad oras orientales Americæ borealis (Stimpson).

---

Gen. 3. **Heterotanais**, n.

Corpus feminae forma et habitu fere ut in genere antecedente; maris vero sat discrepans.

Antennæ 1mi paris feminae breves, pedunculo 3-articulato,

flagello minimo, rudementari; maris angustæ et elongatæ, flagello plus minusve evoluto.

Mandibulæ structura fere ut in *Leptochelia*, processu molari crassissimo.

Partes omnes masticationis in mare abortæ.

Chelipedes feminae structura normali; maris vero sat discrepantes, imperfecte cheliformes, digito immobile brevissimo vel omnino obsoleto.

Pedes ambulatorii et pleopoda fere ut in *Leptochelia*.

Uropoda biramea, ramo externo minimo, sed distincte biarticulato, interno elongato 4—5-articulato.

Marsupium feminae structura normali.

# 1. *Heterotanais* *Ørsted* (Krøyer).

*Tanais Ørsted*, Krøyer, Nat. Tidsskr. Bd. 4, pg. 183, ♀.

— — Gaimard's voyage, Crustacea, tab. 31, fig. 3 a—l, ♀.

*Tanais curculio*, Krøyer, l. c. pg. 184, ♂.

— — Gaimard's voyage. Crust. tab. 30, fig. 4 a, ♂.

*Tanais balthicus*, Fr. Müller, Archiv für Naturgeschichte, Jahr. 18, Bd. 1, pg. 89, tab. IV, fig. 3 & 4, ♀.

*Tanais Rhynchites*, Idem, ibid. pg. 88, tab. IV, fig. 1 & 2, ♂.

*Tanais Ørsted*, Lilljeborg, Bidrag til kannedomen om de inom Sverige och Norrige förekommande Tanaiden, pg. 12.

*Charact. spec.* Corpus quinqvies circiter longius quam latius, segmento cephalico feminae brevi, antice leviter modo attenuato, maris multo magis elongato, apicem versus subito valde coarctato et tenuiter exserto. Segmentum penultimum et antepenultimum corporis antiqui ceteris majora. Oculi haud magni in femina et mare similes. Antennæ 1mi paris feminae segmento cephalico breviores, articulo basali magno, ceteris fere duplo longiore; maris angustiores et magis elongatæ, articulo pedunculi

Imo ceteris 2 junctis vix longiore, flagello brevi, biarticulato, tertiam pedunculi longitudinis partem non superante. Chelipedes feminae mediocres, manu perfecte chelata, ovali, digitis brevibus, immobili intus serraturas 3 præbente, mobili tuberculo singulo obtuso prope basin ornato; maris portentosæ magnitudinis, carpo valde dilatato extus ad apicem processu magno laminari antice porrecto ornato, manu non chelata ad basin lobum angustum, lingvæformem, retro vergentem emittente, dactylo elongato, falciformi, intus denticulis 3 armato. Uropoda dimidiam corporis postici longitudinem vix assequeantia, ramo interno 4-articulato ad apicem longe setifero. Longit. feminae 2.00 mm; maris fere eadem.

*Habitat* ad oras Daniae (Krøyer), Prussicæ borealis (Fritz Müller), Bahusiæ (Lilljeborg) et Norvegiæ meridionalis (A. Boeck et ipse).

---

## 2. *Heterotanais anomalus*, n.

*Tanais dubius* (forma altera maris), Dohrn, Untersuchungen über Bau und Entwicklung der Arthropoden, tab. XII, fig. 17.

*Charact. spec.* ♂. Corpus quinqvies circiter longius quam latius, segmento cephalico antice leviter modo coarctato, 3 posterioribus pedigeris antecedentibus multo majoribus. Oculi permagni corneis numerosis. Antennæ 1mi paris sat elongatæ, dimidiam circiter corporis antici longitudinem æquantes, articulo ultimo pedunculi minimo, flagello magno pedunculo longiore, 7-articulato, fasciculis magnis ciliorum sensitivorum ornato. Chelipedes haud fortes, manu oblonga carpo longiore, imperfecte chelata, digito immobili brevissimo, processum simplicem triangularem formante, mobili elongato, falciformi, intus denticulis 2 armato. Pedes ambulatorii sat elongati et angusti, articulo basali posteriorum dilatato. Uropoda dimidiam corporis postici

longitudinem æquantia, ramo interno 5-articulato et longe setifero. Longit. 2.30 mm. (Femina ignota).

*Habitat* in mari mediterraneo ad Messinam (Dohrn) et Speziam (ipse).

---

3. **Heterotanaïs limicola**, (Harger).

*Leptochelia limicola*, Harger, l. c. pg. 424, tab. XIII, fig. 87,  
88. ♂.

*Habitat* ad oras Americæ borealis (Harger).

---

4. **Heterotanaïs tenuis**, (Thomson).

*Paratanaïs tenuis*, Thomson, Ann. nat. hist. Ser. 5. Vol. 6.

*Habitat* ad oras Novæzealandiæ (Thomson).

---

Gen. 4. **Paratanaïs** Dana 1852.

Corpus feminae lineare. plus minusve elongatum, maris multo magis abbreviatum. Segmentum cephalicum antice æqualiter attenuatum, lobis ocularibus discretis. Corpus posticum bene evolutum antico non latius.

Oculi distincti, corneis et pigmento nigro instructi.

Antennæ 1mæ paræ feminae conicæ, 3-articulatæ, maris multo majores, pedunculo biarticulato, articulo 1mo majore, flagello bene definito, 4-articulato, fasciculis densis cilorum sensitivorum ornato.

Mandibulæ bene evolutæ processu molari magno et crasso.

Partes masticationis maris, maxillipedibus exceptis abortæ; epistomum obtuse conico productum.

Chelipedes in femina et mare parum dissimiles, manu oblonga, digitis brevibus.

Pedes ambulatorii sat fortes; 1mum par a ceteris paulo



discrepans, dactylo elongato setiformi; paria 3 posteriora antecedentibus 2 majora, articulo basali parum tumefacto.

Pleopoda omnia bene evoluta in mare qvam in femina majora.

Uropoda brevia, biramea, ramis subæqualibus, biarticulatis.

Marsupium feminae structura normali.

---

### 1. *Paratanais Batei*, n.

*Paratanais forcipatus*, Sp. Bate & Westwood, British sessile eyed Crustacea pg 138. ♀ (non = *Tanais forcipatus* Lilljeborg).

*Charact. spec.* Corpus feminae qvinqvies circiter longius qvam latius, antice et postice leviter attenuatum, maris multo brevius medio leviter coarctatum. Oculi in femina minuti, in mare vero insolitæ magnitudinis, ovati, corneis numerosis ornati. Antennæ 1mi paris feminae segmento cephalico breviores, articulo ultimo (flagello) antecedente longiore; maris tertiam fere corporis longitudinis partem æqvantes, articulo flagelli 1mo brevissimo, fere disciformi. Chelipedes feminae sat magni et robusti, manu carpo paulo longiore vix vero latiore, digito immobili intus serraturas 3—4 præbente; maris forma leviter discrepante, manu apicem versus dilatata, digito immobili intus dense serrulato. Uropoda dimidiam corporis postici longitudinem non assequeantia, ramo externo interno paulo brevior et angustior. Longit. feminae oviferae 1.60 mm; maris adulti 0.90 mm.

*Habitat* ad oras meridionales Angliæ (Sp. Bate) adqve oras occidentales Norvegiæ (ipse); nec non in mari mediterraneo ad Speziam (ipse).

---

2. **Paratanais elongatus**, Dana.

*Paratanais elongatus*, Dana, United States Exploring Expedition, Crustacea, T. II, pg. 799, tab. 53, fig. 4.

*Habitat* in oceano pacifico ad insulas Soolooenses (Dana).

---

Gen. 5. **Typhlotanais**, n.

Corpus feminae plerumque sat elongatum, subdepressum, lineare, lateribus rectis; maris paulo brevius et medio leviter coarctatum. Segmentum cephalicum mediocre, antice subtruncatum vel medio leviter productum, lobis ocularibus nullis. Segmentum liberum 1mum vulgo ceteris multo brevius. Corpus posticum bene evolutum antico latitudine æquale.

Oculi omnino nulli.

Antennæ 1mi paris feminae subulato-conicæ, 3-articulatæ, articulo 2do brevi, ultimo (flagello) angusto et elongato; maris multo majores, pedunculo biarticulato, articulo 1mo permagno et laminari, ultimo minimo, flagello bene evoluta, 4-articulato, fasciculis densis ciliorum sensitivorum ornato. Antennæ 2di paris tenuissimæ, articulo 2do dilatato.

Mandibulæ bene evolutæ, processu molari cylindrico, recto, ad apicem leviter dilatato et tuberculis dentiformibus cincto.

Partes masticationis maris, maxillipedibus exceptis, abortæ; epistomum prominens, globulatum.

Chelipedes feminae et maris subsimiles, minus robusti, manu plerumque angusta, digitis simplicibus.

Pedes ambulatorii 1mi paris ceteris longiores, dactylo setiformi, sequentes breves, articulo basali parium 3 posteriorum vulgo valde tumefacto.

Pleopoda omnia bene evoluta, in mare quam in femina majora.

Uropoda brevia, biramea, ramis ambobus biarticulatis, vel uno et altero uniarticulato.

Marsupium feminae structura normali.  
(Species abyssicolæ).

---

1. **Typhlotanais tenuimanus**, (Lilljeborg).

*Tanais tenuimanus*, Lilljeborg, Bidrag til kännedomen om de inom Sverige och Norrige förekomande Crustaceerna af Tanaidernes familj, pg. 15.

*Charact. spec.* ♀. Corpus plus sexies longius quam latius, segmentis instrictionibus haud profundis disjunctis, cephalico sat magno, multo longiore quam latiore, antice regulariter attenuato, libero 1mo brevissimo, sequentibus 4 subæqualibus, rectangularibus, ultimo illis paulo brevior. Corpus posticum medio leviter dilatatum. Antennæ 1mi paris segmento cephalico paulo breviores, subulatæ. articulo ultimo (flagello) elongato et angusto, basalem longitudine fere æqvante. Chelipedes apicem versus attenuati, manu perangusta, carpo multo brevior, digitis palmæ longitudinem minime assequentibus. Pedes ambulatorii 1mi paris ceteris multo longiores; paria sequentia 2 sat robusta, articulo 3tio dilatato et spina valida marginis interioris armato. Uropoda dimidiam corporis postici longitudinem æqvantia, ramis ambobus biarticulatis, inæqualibus, externo quam interno multo et brevior et angustior. Longit. 4.20 mm.

*Habitat* ad oras meridionales et occidentales Norvegicæ usque ad insulas Lofotenses in prof. 50—300 orgyrum (Lilljeborg et ipse).

---

2. **Typhlotanais æqviremis** (Lilljeborg).

*Tanais æqviremis*, Lilljeborg, l. c. pg. 21.

*Tanais depressus*, G. O. Sars. Beretning om en i Sommeren 1865 foretagen zoologisk Reise, pg. 40.

*Charact. spec.* ♀. Corpus lineare, distincte depressum, plus sexies longius quam latius, segmento cephalico breviusculo, parum longiore quam latiore. Segmentum 1mum liberum ceteris brevius, sequentia rectangularia, latiora quam longiora. Corpus posticum ubiqve fere latitudine eadem, postice subtruncatum. Antennæ 1mi paris sat elongatæ, segmento cephalico vix breviores, conico-attenuatæ, articulo basali medio leviter coarctato (non vero suturam ullam præbente) sequentibus 2 junctis longiore. Chelipedes quam in specie antecedente multo validiores, manu sat magna, carpo longitudine æquali, oblongo, digitis palmæ longitudinem assequentibus. Pedes ambulatorii 2di et 3tii paris perparvi, dactylo minimo; paria 3 posteriora vero sat robusta, articulo basali valde tumefacto, ultimo angusto, apicem versus leviter dilatato. Uropoda brevissima, segmento terminali parum longiora, ramis subæqualibus, interno uniarticulato vel imperfecte biarticulato, externo distincte biarticulato seta una valida terminato. Longit. 3.10 mm.

*Habitat* ad Bahusiam (Lilljeborg) adque oras meridionales et occidentales Norvegiæ in prof. 30—200 orgyrum (Lilljeborg et ipse).

### 3. *Typhlotanais brevicornis* (Lilljeborg).

*Tanais brevicornis*, Lilljeborg, l. c. pg. 15.

*Charact. spec.* ♀. Corpus angustum et elongatum, plus 8ies longius quam latius, segmento cephalico antice æqualiter attenuato, libero 1mo ceteris parum brevior. Antennæ 1mi paris breves, dimidia segmenti cephalici longitudine vix longiores, articulo basali ceteris junctis multo majore. Chelipedes mediocres, manu oblonga carpo paulo brevior, digitis palmæ longitudinem æquantibus. Pedes ambulatorii quam in speciebus antecedentibus debiliores, articulo basali posteriorum minus tumefacto. Uropoda dimidiam corporis postici longitudinem non



asseqventia, ramis inæqualibus, externo brevissimo, uniarticulato, interno biarticulato plus duplo majore. Longit. 1.60 mm.

*Habitat* ad oras meridionales et occidentales Norvegiæ (Lilljeborg et ipse) adqve oras Daniæ (Meinert).

---

#### 4. *Typhlotanais finmarchicus*, n.

*Charact. spec.* ♀ & ♂. Corpus feminae sublineare, depressum, 6ies longius quam latius, segmentis rectangularibus; maris magis abbreviatum, medio coarctatum, segmentis instrictionibus majoribus disjunctis. Segmentum cephalicum feminae fere æque latum ac longum utrinque æqualiter arcuatum, maris multo angustius et prope apicem leviter coarctatum. Antennæ 1mi paris feminae longitudinem segmenti cephalici vix assequestes, articulo basali ceteris junctis fere duplo longiore; maris nonnihil majores, articulo 1mo pedunculi permagno et lato, flagello dimidiam pedunculi longitudinem superante. Chelipedes mediocres, manu carpo paulo brevior, apicem versus leviter dilatata, digitis palmæ longitudinem æquantibus. Pedes ambulatorii fere ut in specie antecedente. Uropoda brevia, ramis ambobus biarticulatis, externo interno paulo brevior et multo angustior. Color feminae ut vulgo uniformiter albidus; maris vero pigmento diffuso pallide fusco-violaceo variegatus. Longit feminae oviferae 2.00 mm; maris 1.50 mm.

*Habitat* in sinu Varangerfjord Finmarchiæ orientalis in prof. 30—40 orgyrum sat frequens (ipse).

---

#### 5. *Typhlotanais assimilis*, n.

*Charact. spec.* ♀. Corpus lineare, depressum, 7ies fere longius quam latius, segmento cephalico magno in parte modo antico attenuato, libero 1mo ceteris brevior. Antennæ 1mi

paris sat elongatæ, subulato-conicæ. articulo basali ceteris junctis parum longiore, ultimo perangusto et elongato. Chelipedes apicem versus attenuati, manu carpi longitudinem æqvante, sed multo angustiore, digitis palma brevioribus. Pedes ambulatorii 2di et 3tii paris minimi, articulo ultimo leviter dilatato et complanato, paria 3 posteriora sat robusta, articulo basali tumefacto. Uropoda segmento terminali vix longiora, ramis ambobus biarticulatis, externo interno brevior, non vero angustiore seta una valida terminato. Longit. feminae oviferæ 1.70 mm.

*Habitat* ad oras occidentales Norvegiæ (ipse).

---

#### 6. *Typhlotanais tenuicornis*, n.

*Charact. spec.* ♀. Corpus angustum et elongatum, fere 8ies longius quam latius, segmento cephalico antice leviter attenuato, segmento libero 1mo et ultimo corporis antici subæqualibus et ceteris paulo brevioribus. Antennæ 1mi paris longitudinem segmenti cephalici assequentes, quam solito angustiores, articulo basali ceteris junctis parum longiore, ultimo sat elongato. Articulus 3tius antennarum 2di paris subtus dentibus 2 recurvis armatus. Chelipedes mediocres, manu sat elongata, carpo nonnihil longiore, oblonga, digitis palmæ longitudinem assequentibus. Pedes ambulatorii parium 3 priorum seta una insolito modo elongata articuli 2di ornati; paria 3 posteriora robusta, articulo basali tumefacto. Uropoda brevissima, ramis ambobus uniarticulatis, linearibus, interno externo duplo fere majore. Longit feminae oviferæ 1.75 mm.

*Habitat* in sinu Eidsfjord Norvegiæ meridionalis in prof. 120 orgyarum (ipse).

7. **Typlotanais michrocheles**, n.

*Charact. spec.* ♀. Corpus septies circiter longius quam latius, segmentis instrictionibus bene conspicuis disjunctis, cephalico sat magno antice regulariter attenuato, fronte medio acute producto, libero 1mo ceteris brevior antice leviter expanso, sequentibus subquadratis. Corpus posticum antico vix latius. Antennæ 1mi paris haud elongatæ, segmento cephalico multo breviores, conicæ, articulo basali ceteris junctis longiore, ultimo in dentem acutum desinente. Chelipedes quam solito minores, manu perparvo et debili, digitis palmæ longitudinem æquantibus. Pedes ambulatorii 2di et 3tii paris a 1mo pari parum dissimiles, dactylo elongato, setiformi. Uropoda dimidiam corporis postici longitudinem assequentia, ramis angustis et elongatis, inæqualibus, externo tenuissimo, uniarticulato, interno illo fere duplo longiore, biarticulato. Longit. 2.70 mm.

*Habitat* ad oras occidentales Norvegiæ in profunditate 60—100 orgyarum (ipse).

8. **Typhlotanais cornutus**, (G. O. Sars).

*Paratanais cornutus*, G. O. Sars, Crustacea et Pycnogonida nova in itinere 2do et 3tio Expeditionis Norvegiæ anno 1877 & 1878 collecta, No. 5.

*Charact. spec.* ♀. Corpus sat abbreviatum, vix 5ies longius quam latius, segmento cephalico utrinque æqualiter arcuato, antice medio in processum acutum rostriformem inter antennas 1mi paris porrectum exserto, segmento libero 1mo ceteris multo brevior. Antennæ 1mi paris sat elongatæ, subulato-conicæ, articulo basali ceteris junctis parum longiore, ultimo angusto setis apicalibus longissimis ornato. Chelipedes magni, manu tamen carpo distincte angustiore, digitis palma brevioribus, articulo basali sat tumefacto. Uropoda brevia, ra-

mis ambobus biarticulatis, inæqualibus, externo quam interno nonnihil brevior. Longit. 1.65 mm.

*Habitat* in mari boreali extra Finmarchiam occidentalem ad Stat. 290 Expeditionis Norvegicæ (ipse).

---

#### 9. *Typhlotanais penicillatus*, n.

*Charact. spec.* ♀. Corpus minus elongatum, latitudine maxima 5tam longitudinis partem superante, segmentis liberis pedigeris subæqualibus, cephalico vix longiore quam latiore, margini frontali medio leviter produto. Corpus posticum antico non latius, segmento ultimo brevi et obtuso. Antennæ 1mi paris segmento cephalico distincte longiores, tenuissimæ, articulo basali ceteris 2 junctis longiore, ultimo lineari setis apicalibus longissimis instructo; 2di paris articulo 3tio quam solito minore. Chelipedes tenues et debiles, manu angusta, digitis palmæ longitudinem fere æquantibus. Uropoda dimidiam circiter corporis postici longitudinem æquantia, ramis longitudine fere æqualibus, externo angustiore, uniarticulato, interno distincte biarticulato. Longit. feminae oviferae 1.40 mm.

*Hab.* ad oras occidentales Norvegicæ (ipse).

---

#### 10. *Typhlotanais messinensis*, n.

*Charact. spec.* ♀. Corpus lineare, sat elongatum, plus 6ies longius quam latius, segmento cephalico antice leviter modo attenuato, marginibus lateralibus arcuatis, segmento libero 1mo ceteris brevior, sequentibus rectangularibus. Antennæ 1mi paris anguste conicæ, articulo basali ceteris junctis nonnihil longiore. Chelipedes apicem versus attenuati, manu carpo et brevior et angustior, digitis palmæ longitudinem non æquantibus. Pedes ambulatorii structura solita, articulo basali



posteriorum sat tumefacto. Uropoda dimidiam corporis postici longitudinem assequebantur, ramis ambobus biarticulatis, inæqualibus, externo quam interno multo et breviori et tenuiore. Longit. feminae oviferae 2.40 mm.

*Habitat* in mari mediterraneo ad Messinam (ipse).

### Gen. 6. **Leptognathia**, n.

Corpus feminae plerumque angustum et elongatum, subcylindricum, segmentis constrictionibus conspicuis disjunctis; maris multo magis abbreviatum. Segmentum cephalicum mediocrem, in parte modo dimidia antica attenuatum, fronte subtruncato, lobis ocularibus nullis discretis. Corpus posticum ex segmentis 6 distinctis compositum, in mare quam in femina magis evolutum.

Oculi nulli.

Antennae 1mi paris feminae quadriarticulatae, maris multo majores, pedunculo 3-articulato, articulis 2 prioribus magnis et tumidis, ultimo minimo, flagello distincto, 4-articulato, fasciculis permagnis ciliorum sensitivorum ornato.

Mandibulae perparvae et debiles, acie angusta, processu molarum laciniam tenuem, acuminatam, recurvatam formante.

Partes masticationis maris, maxillipedibus exceptis, abortivae.

Chelipedes feminae mediocres, manu plerumque dilatata, digitis validis, immobili intus plus minusve distincte serrulato; maris debiliores, digitis simplicibus, nudis.

Pedes ambulatorii 1mi paris a paribus sequentibus 2 haud diversi; paria 3 posteriora leviter discrepantia, plus minusve spinosa.

Pleopoda omnia bene evoluta (raro in femina absentia); maris robustiora, setis longioribus.

Uropoda plerumque biramea, interdum saltem imperfecte

biramea vel subsimplicia, ramis semper valde inæqvalibus, interno majore biarticulato (in mare 3-articulato), externo uni-vel biarticulato, multo angustiore.

Marsupium feminae structura normali.

(Species abyssicolæ).

---

1. **Leptognathia longiremis** (Lilljeborg).

*Tanais longiremis*, Lilljeborg, l. c. pg. 19.

*Tanais islandicus*, G. O. Sars, Prodrômus descriptionis Crust. et Pycnog. in Exped. Norv. anno 1876 collect. No. 61.

*Charact. spec.* ♀ & ♂. Corpus feminae elongatum et angustum, plus 7ies longius quam latius, segmento cephalico sat magno, parte dimidia postica ubique latitudine eadem, antica subito attenuato, segmento libero 1mo et ultimo subæqvalibus et ceteris brevioribus, segmento terminali corporis postici sat magno et lato, 3 antecedentibus longitudine æquali, postice obtuse rotundato, denticulo utrinque inferne vergente munito. Corpus maris modo 5ies longius quam latius, segmento cephalico sat dilatato, latiore quam longiore, segmentis liberis omnibus et corporis antici et postici subæqvalibus, terminali angusto, subtriangulari, medio producto. Antennæ 1mi paris feminae segmento cephalico breviores, sensim attenuatæ, articulo basali ceteris junctis longitudine circiter æquali; maris multo validiores, flagello pedunculi longitudinem assequente, articulis 2 prioribus brevissimis, ultimis 2 elongatis et subæqvalibus. Chelipedes feminae sat magni, manu dilatata, ovato-triangulari, carpo vix minore, antice prope insertionem digitis mobilis crista indistincte denticulata ornata, digito immobili intus distincte serrulato. Uropoda feminae sat elongata, dimidiam corporis postici longitudinem assequentia, ramis ambobus biarticulatis, interno quam externo plus triplo longiore setis longissimis apicalibus instructo,

ramo interno maris distincte 3-articulato, articulo basali brevi. Longit. feminae 3.75 mm; maris 2.55 mm.

*Habitat* ad Bahusiam (Lilljeborg) adque oras Norvegiæ totius a sinu Christianiensi usque ad Vadsø (Lilljeborg et ipse) nec non in portu ad Reikjavik Islandiæ adque Stat. 290 Expeditionis Norvegiæ (ipse).

---

## 2. *Leptognathia breviremis* (Lilljeborg).

*Tanais breviremis*, Lilljeborg, l. c. pg. 21.

*Charact. spec.* ♀. Corpus qvam in antecedente multo minus elongatum, vix 6ies longius qvam latius, segmento cephalico haud magno, corpore postico regulariter arcuato, segmento terminali brevi. Antennæ 1mi paris longitudinem fere segmenti cephalici assequentes, articulo basali ceteris junctis multo brevior, 2do sat magno et tumido. Chelipedes mediores, manu carpi longitudinem æqvante, apicem versus dilatata, digitis palma multo brevioribus. Uropoda perbrevia, segmento terminali vix longiora, ramo interno biarticulato setisqve longissimis et divergentibus terminato, externo minimo uniarticulato. Longit. feminae oviferæ 1.45 mm.

*Habitat* ad Bahusiam (Lilljeborg) adque oras meridionales et occidentalis Norvegiæ (Lilljeborg et ipse).

---

## 3. *Leptognathia brevimana* (Lilljeborg).

*Tanais brevimanus*, Lilljeborg, l. c. pg. 22.

*Charact. spec.* ♀. Corpus gracillimum, plus 9ies longius qvam latius, segmento cephalico oblongo, fere duplo longiore qvam latiore. Corpus posticum sat magnum, antico distincte latius, postice vix attenuatum, segmento terminali magno ad apicem rotundato-truncato. Antennæ 1mi paris minus regulari-

ter attenuatæ, articulo 2do basali vix angustiore, ultimis 2 junctis illo longitudine æqualibus. Chelipedes haud magni, manu carpo brevior. subtriangulari, processu acuminato ad insertionem digiti mobilis armata. Uropoda segmento terminali vix longiora, imperfecte biramea, ramo interno biarticulato, cylindrico, externo processum acuminatum a trunco non definitum formante. Longit. feminae oviferæ 2.80 mm.

*Habitat* ad Bahusiam (Lilljeborg) adque oras meridionales et occidentales Norvegiæ (Lilleborg et ipse), nec non in mari mediterraneo ad Messinam (ipse).

---

**Leptognathia filiformis** (Lilljeborg).

*Tanais filiformis*, Lilljeborg, l. c. pg. 23.

*Charact. spec.* ♀. Corpus gracillimum, 10ies longius quam latius, segmento cephalico angusto, libero 1mo et ultimo ceteris brevioribus. Corpus posticum apicem versus leviter dilatatum, segmento terminali obtuse rotundato. Antennæ 1mi paris structura fere ut in specie antecedente, articulo 2do sat dilatato et 2 ultimis longitudine æquali. Chelipedes parvi, manu subtriangulari, digito immobili ad apicem vix curvato. Uropoda dimidiam corporis postici longitudinem assequebantur, subsimplicia, ramo interno biarticulato, externo tuberculum modo minimum a trunco non definitum formante. Longit. feminae oviferæ 2.70 mm.

*Habitat* ad Bahusiam (Lilljeborg), in freto Øresund (Meinert) adque oras meridionales et occidentales Norvegiæ (Lilljeborg et ipse).

---

5. **Leptognathia laticaudata**, n.

*Charact. spec.* ♀. Corpus minus angustum, 6ies circiter



longius quam latius, segmento cephalico breviusculo, lateraliter æqualiter arcuato, segmentis liberis 2 prioribus ceteris multo brevioribus. Corpus posticum sat magnum et dilatatum, antico distincte latius, segmento terminali postice leviter attenuato, apice obtuse producto. Antennæ 1mi paris longitudinem segmenti cephalici æquantes, articulo basali ceteris junctis multo brevior, ultimo sat elongato et angusto. Partes masticationis debillissimæ. Chelipedes sat robusti, subrigidi, parte basali magna et tumida, manu carpo multo longiore, vix vero latiore, digito mobili extus subtiliter serrulato, immobili ad apicem 3-dentato. Pedes ambulatorii 1mi paris sequentibus paulo majores, dactylo longissimo, setiformi; paria 3 posteriora sat robusta, sparse spinosa. Uropoda brevissima, ramis ambobus biarticulatis, interno conico, externo minimo illo multo angustiore et dimidia parte brevior. Longit. 2.60 mm.

*Habitat* ad oras meridionales Norvegiæ inq̃uo mari mediterraneo ad Speziam et Neapel (ipse).

#### 6. *Leptognathia* (?) *manca*, n.

*Charact. spec.* ♀. Corpus angustum et elongatum, plus 7ies longius quam latius, parte dimidia postica leviter attenuata, segmento cephalico ad latera æqualiter arcuato, libero 1mo sequentibus parum minore. Corpus posticum angustum, subcylindricum, segmento terminali brevi et obtuse rotundato. Antennæ 1mi paris et partes masticationis structura fere ut in speciebus ceteris. Chelipedes haud magni, manu ovata, carpo majore, digitis palma brevioribus. Pedes ambulatorii 1mi paris iisdem parium 2 sequentium exacte similes, setis spiniformibus longis instructi. Pleopoda omnino desunt. Uropoda dimidiam corporis postici longitudinem assequentia, ramo interno biarticulato, externo uniarticulato dimidiam illius longitudinem vix superante. Longit. feminae oviferae 2.00 mm.

*Habitat* ad oras meridionales Norvegiæ in sinu Eidsfjord (ipse).

---

7. **Leptognathia gracilis** (Krøyer).

*Tanais gracilis*, Naturh. Tidsskr. Bd. IV. pg. 182.

— — Idem, Gaimard's voyage tab. 31, fig. 4—a—i.

*Habitat* ad oras Spitsbergiæ (Krøyer).

---

8. **Leptognathia graciloides** (Lilljeborg).

*Tanais graciloides*, Lilljeborg, l. c. pg. 18.

*Habitat* ad Bahusiam (Lilljeborg).

---

9. **Leptognathia rigida** (Sp. Bate).

*Paratanais rigidus*, Sp. Bate & Westwood, Brit. sessile eyed  
Crust. Bd. 2, pg. 141.

*Habitat* ad oras occidentales Angliæ (Sp. Bate & Westwood).

---

10. **Leptognathia coeca** (Harger).

*Leptochelia coeca*, Harger, Report on the marine Isopoda of  
New-England, pg. 427, tab. XIII, fig. 91.

*Habitat* ad oras orientales Americæ borealis (Harger).

---

Gen. 7. **Pseudotanaïs**, n.

Corpus obesum et abbreviatum, subdepressum, segmento cephalico antice coarctato, fronte truncato, lobis ocularibus nullis discretis. Segmenta liberia 3 priora sequentibus 2 multo breviora. Corpus posticum ex segmentis 6 distinctis compositum, ultimo majore, obtuso.

Oculi nunc absentes, nunc distincti, sed parum evoluti, corneis inconspicuis.

Antennæ 1mi paris tenues, 3-articulatæ, in femina et mare vix dissimiles; 2di paris illis parum minores.

Mandibulæ haud magnæ, acie laminari et antice subtiliter serrulata, processu molari minimo, styliformi, recto.

Maxillipedum laminæ incisivæ in unam confluentes.

Chelipedes magni, in femina et mare similes, manu elongata, digitis angustis et acuminatis.

Pedes ambulatorii sat elongati; 1mum par a ceteris paulo discrepans, articulo ultimo attenuato, dactylo longissimo, setiformi; paria sequentia subsimilia, articulo penultimo dilatato et aculeo cultrato, in paribus 2 prioribus majore armato, dactylo brevi.

Pleopoda nunc in femina omnino desunt, nunc et in femina et in mare distincta, lamellis modo ad apicem setiferis.

Uropoda biramea, ramis ambobus biarticulatis, interiore majore.

Marsupium feminæ ut in genere *Tanaïs* laminis solummodo 2 magnis segmento libero 4to affixis formatum.

1. **Pseudotanaïs forcipatus** (Lilljeborg).

*Tanaïs forcipatus*, Lilljeborg, l. c. pg. 16.

*Charact. spec.* ♀ & ♂. Corpus feminæ vix quadruplo longius quam latius, maris adhuc magis abbreviatum. Segmentum cephalicum apicem versus valde coarctatum, fronte ad lineam

rectam truncato. Segmenta libera 3 priora juncta sequente vix longiora et conspicue angustiora, ultimum dimidiam antecedentis longitudinem vix superans. Oculi nulli. Antennæ 1mi paris longitudinem segmenti cephalici assequentes, articulo basali leviter curvato ceteris junctis paulo longiore. Chelipedes dimidiam fere corporis longitudinem æquantes, manu carpo duplo longiore, digitis tenuibus et parum curvatis, distincte vero forcipatis, palmæ longitudinem æquantibus. Aculeus cultratus articulo penultimo pedum ambulatoriorum 2di et 3tii paris affixus haud fortis. Pleopoda in femina omnino carentia, in mare vero bene evoluta. Uropoda brevia, segmento terminali parum longiora, ramo interno quam externo multo et longiore et crassiore. Longit. feminae 1.40 mm; maris 1.mm.

*Habitat* ad Bahusiam (Lilljeborg), in freto Øresund (Meinert), adque oras meridionales et occidentales Norvegiæ (Lilljeborg et ipse).

---

## 2. *Pseudotanaïs macrocheles*, n.

*Charact. spec.* ♀. Corpus quam in specie antecedente adhuc magis abbreviatum, triplo modo longius quam latius, medio leviter dilatatum, antice et postice attenuatum. Segmentum cephalicum forma fere ut in *P. forcipato*, sed paulo brevius. Segmenta libera 3 priora juncta sequente longiora et illo non abrupte angustiora. Oculi nulli. Antennæ 1mi paris sat magnæ segmento cephalico multo longiores, articulo basali ceteris junctis longitudine æquali, setis 2 longis instructo, ultimo angusto et elongato. Chelipedes quam in *P. forcipato* paulo minus robusti, manu vero sat magna, digitis elongatis et acuminatis, palma longioribus, vix vero forcipatis. Aculeus cultratus articulo penultimo pedum ambulatoriorum 2di et 3tii paris affixus permagnus. Pleopoda feminae omnia bene evoluta



et longe setifera. Uropoda quam in specie antecedente magis elongata, ramis angustioribus. Longit. 1.45 mm.

*Habitat* ad oras meridionales Norvegiæ, nec non in sinu Varangerfjord Finmarchiæ orientalis (ipse).

---

### 3. *Pseudotanaïs Lilljeborgii*, n.

*Charact. spec.* ♀. Corpus quam in antecedente paulo minus robustum, vix tamen quadruplo longius quam latius. Segmentum cephalicum apicem versus leviter modo coarctatum, fronte latiusculo, rotundato-truncato. Segmenta libera 3 priora instrictionibus conspicuis definita et juncta sequente paulo longiora. Oculi bene conspicui, sed parvi, punctiformes, rubrofusci, in latere capitis siti et a margine frontali remoti. Antennæ 1mi paris segmento cephalico vix longiores, articulis ultimis 2 subæqualibus et junctis basali brevioribus. Chelipedes sat robusti, manu oblonga carpo non duplo longiore, digitis palma brevioribus, non forcipatis. Aculeus cultratus articulo penultimo pedum ambulatoriorum 2do et 3tii paris affixus mediocris. Pleopoda in femina omnino desunt. Uropoda brevia, ramo interno quam externo multo crassiore et fere duplo longiore. Longit. 1.55 mm.

*Habitat* in sinu Varangerfjord Finmarchiæ orientalis (ipse).

---

### 4. *Pseudotanaïs mediterraneus*, n.

*Charact. spec.* ♀. Corpus robustum et abbreviatum, longitudine latitudinem parum magis quam triplo superante, medio leviter dilatatum, antice et postice sensim attenuatum. Segmentum cephalicum antice sat coarctatum, fronte medio leviter producto. Segmenta libera 3 priora brevissima, juncta tamen sequente paulo longiora. Oculi bene conspicui, nigri, angulis

capitis anterioribus approximati. Antennæ 1mi paris angustæ et elongatæ, articulo basali ceteris junctis longitudine æquali. Chelipedes magni et robusti, manu carpo duplo longiore, attenuata, digitis angustis et acuminatis parum curvatis, ad basin leviter forcipatis. Aculeus articulo penultimo pedum ambulatoriorum 2di et 3tii paris affixus haud fortis, acutus. Pleopoda feminæ bene evoluta, longe setifera. Uropoda sat elongata, ramis angustis, fere subæqualibus. Longit. 1.50 mm.

*Habitat* in mari mediterraneo ad Speziam (ipse).

---

#### Gen. 8. **Cryptocope**, n.

Corpus plus minusve robustum, segmentis instrictionibus conspicuis disjunctis. Segmentum cephalicum antice coarctatum, fronte truncato, lobis ocularibus nullis discretis. Corpus posticum ex segmentis 6 distinctis compositum.

Oculi nulli.

Antennæ 1mi paris feminæ breves 4-articulatæ, maris multo majores, structura fere ut in genere *Leptognathia*.

Mandibulæ bene evolutæ, acie serrulata, lamella secundaria m. dextræ valde exstante, processu molari sublaminari, inermi.

Chelipedes in femina et mare similes structura solita.

Pedes ambulatorii tenues inter se parum dissimiles, dactylo elongato.

Pleopoda feminæ minima et rudimentaria, biramea, setis nullis; maris vero bene evoluta, natatoria et longe setifera.

Uropoda feminæ brevissima, biramea, ramo interno bi-externo uniarticulato; maris multo magis elongata, ramo interno 3-externo biarticulato.

### 1. *Cryptocope abbreviata* (G. O. Sars).

*Tanais abbreviatus*, G. O. Sars, Beretning om en i Sommeren 1865 foretagen zoologisk Reise, pg. 41.

*Charact. spec.* ♀. Corpus perbreve et obesum vix quadruplo longius quam latius, segmento cephalico antice sat coarctato, corpore postico antico vix angustiore. Antennæ 1mi paris longitudinem segmenti cephalici vix assequentes, articulo basali ceteris junctis paulo brevior. Chelipedes robusti, carpo brevi, manu illo longiore, apicem versus vix dilatata, digitis palma brevioribus. Pleopoda feminae lamellis introrsum flexis, interiore minima tuberculiformi. Uropoda brevissima, ramo externo conico dimidiam modo interni longitudinem æqvante. Longit. 1.40 mm.

*Habitat* in sinu Christianiensi (ipse).

### 2. *Cryptocope Vøringii* (G. O. Sars).

*Tanais Vøringii*, G. O. Sars, Prodrömus descriptionis Crust. et Pycnogon. etc. No. 62.

*Charact. spec.* ♀ & ♂. Corpus quam in specie antecedente magis elongatum, 5ies circiter longius quam latius, segmentis imprimis feminae instrictionibus profundis disjunctis, submoniliformibus. Segmentum cephalicum longius quam latius antice sensim coarctatum. Corpus posticum feminae antico subito multo angustius, segmento tamen terminali sat tumefacto; fere globulari; maris multo majus, medio dilatatum, segmento terminali angusto apice acute producto. Antennæ 1mi paris feminae fere ut in specie antecedente; maris sat magnæ, flagello pedunculi longitudinem æqvante. Chelipedes sat fortes, manu magna et tumefacta, digitis ad apicem valde curvatis, nigricantibus. Pleopoda feminae lamellis angustis, rectis, subæqualibus. Uropoda feminae fere ut in specie antecedente; maris multo

magis elongata, ramo externo interno multo angustiore et dimidia parte brevior. Longit. feminæ 5.40 mm; maris 4.00 mm.

*Habitat* in magno abyssu areæ frigidæ maris borealis ad Stat. 31, 124 & 248 Expeditionis Norvegicæ (ipse).

---

Gen. 9. **Haplocope**, n.

Corpus angustum et elongatum habitu Leptognathiæ, segmento cephalico mediocri, lobis ocularibus nullis discretis. Corpus posticum ex segmentis 6 distinctis compositum.

Oculi nulli.

Antennæ 1mi paris feminæ breves, 4-articulatæ, sensim attenuatæ.

Mandibulæ bene evolutæ, corpore sat elongato, processu molari cylindrico, apice truncato et denticulis acutis cincto.

Chelipedes haud fortes, structura solita.

Pedes ambulatorii 1mi paris paribus sequentibus 2 omnino similes; paria 3 posteriora leviter discrepantia, spinosa, dactylo elongato.

Pleopoda feminæ minima et rudimentaria, lamellas simplices nudas formantia.

Uropoda sat elongata, biramea, ramis inæqualibus, biarticulatis.

Marsupium feminæ structura solita.

---

1. **Haplocope angusta**, n.

*Charact. spec.* ♀. Corpus gracillimum, 9ies circiter longius quam latius, segmentis instrictionibus conspicuis disjunctis. Segmentum cephalicum oblongum, antice sensim attenuatum, fronte truncato. Segmentum liberum 1mum ceteris parum minus. Corpus posticum antico non latius, lineare, segmento



terminali ad apicem medio angulato. Antennæ 1mi paris segmento cephalico multo breviores, articulo basali sequentibus 2 junctis vix longiore, ultimo angusto, conico. Chelipedes parvi et debiles, manu carpo vix longiore, digitis palma brevioribus. Uropoda dimidiam corporis postici longitudinem superantia, ramo interno sat elongato, cylindrico, externo illo multo angustiore et dimidia parte brevior. Longit. feminae oviferae 1.70 mm.

*Habitat* ad oras meridionales Norvegiæ (ipse)

---

#### Gen. 10. **Strongylura**, n.

Corpus elongatum, subcylindricum, medio leviter coarctatum; integumentis durissimis. Segmentum cephalicum sat magnum antice attenuatum, lobis ocularibus nullis discretis. Corpus posticum quam solito majus, perfecte cylindricum, teres, ex segmentis 6 æqualiter arcuatis, ultimo magno, cupuliformi, compositum.

Oculi nulli.

Antennæ 1mi paris feminae sat robustæ, 4-articulatæ; 2di paris illis multo angustiores, flagello rudimentario excepto, distincte 6-articulatæ.

Mandibulæ bene evolutæ, acie intus curvata sparse denticulata, processu molari sat magno, laminari, ad apicem subtiliter crenulata.

Chelipedes robusti, structura solita.

Pedes ambulatorii tenues et elongati, dactylo angusto; paria posteriora leviter discrepantia, magis spinosa, articulo 1mo ad basin insolito modo coarctato.

Pleopoda feminae omnino desunt.

Uropoda brevissima, biramea, ramo externo minimo, tuberculiformi.

---

1. **Strongylura cylindrata**, n.

*Charact. spec.* ♀. Corpus gracile, plus 8ies longius quam latius, segmento cephalico sequentibus 3 junctis longitudine fere æquali, antice sensim coarctato, fronte truncato, segmento libero 1mo ceteris brevior. Corpus posticum tertiam corporis longitudinis partem nonnihil superans, segmento terminali antecedentibus 4 junctis longitudine æquali, glaberrimo, apice obtuse rotundato. Antennæ 1mi paris longitudinem segmenti cephalici assequentes, articulo basali ceteris junctis longitudine æquali, 2do sat tumido. Chelipedes sat robusti, manu magna, oblonga, carpo longiore, digitis palma brevioribus, immobili intus distincte serrulato. Uropoda perparva et fere insonspicua, ramo interno conico, biarticulato setisqve longis et divergentibus terminato. Longit. 2.85 mm.

*Habitat.* ad oras occidentales Norvegiæ (ipse).

Gen. 11. **Anarthrura**, n.

Corpus elongatum, subdepressum, integumentis tenuibus, subpellucidis. Segmentum cephalicum haud magnum, fronte truncato, lobis ocularibus nullis discretis. Corpus posticum minimum, antico angustius, non segmentatum, postice obtuse angulatum.

Oculi nulli.

Antennæ 1mi paris feminae 4-articulatae; 2di paris illis multo angustiores structura solita.

Mandibulae?

Chelipedes haud magni, parte basali forma insolita, oblonga, tumida, ex segmentis 2 distinctis composita, manu parva et debili.

Peâes ambulatorii 1mi paris ceteris majores et ut paria 2 sequentia dactylo elongato, setiformi instructi; paria 3 posteriora

illis breviora et robustiora, articulo basali tumefacto, ultimo oblique truncato et præter dactylum spinis pluribus armato.

Pleopoda feminæ omnino desunt.

Uropoda imperfecte biramea, ramo externo non a trunco definito.

---

### 1. *Anarthrura simplex*, n.

*Charact. spec.* ♀. Corpus gracile, Sies circiter longius quam latius, segmentis instrictionibus sat profundis disjunctis. Segmentum cephalicum depressum parum longius quam latius; 1mum liberum ceteris brevius, quadratum, sequentia medio latiora. Corpus posticum septimam corporis longitudinis partem vix superans, anguste subcylindricum, medio leviter coarctatum. Antennæ 1mi paris longitudinem segmenti cephalici assequentes, articulo basali ceteris junctis multo breviora. Chelipedes 4tam corporis longitudinis partem æquantes, manu carpo paulo longiore, digitis palmæ longitudinem longe superantibus, immobili intus distincte serrulato, processu recto lanceolato terminato. Uropoda dimidiam corporis postici longitudinem paulo superantia, oblique ad latera vergentia, ramo interno cylindrico, biarticulato, externo processum conicum a trunco non definitum et dimidiam interni longitudinem æquantem formante. Longit. 2.35 mm.

*Habitat* ad oras occidentales, Norvegiæ (ipse).

---

# REMARQUES SUR LA THÉORIE DE LA LUMIÈRE ZODIACALE.

PAR

H. GEELMUYDEN.

---

## I.

M. Groneman à Groningue m'a transmis une brochure (Extrait des Archives Néerlandaises T. XVI) intitulée «Recherches sur la nature de la lumière zodiacale», où il défend la discussion des observations de *Jones*, faite par M. Serpieri dans les «Memorie della società degli spettroscopisti italiani, Appendice 1876», contre quelques remarques critiques, que j'en ai faites en 1878 dans un article de ce journal, intitulé «Om Zodiakallyset» (De la lumière zodiacale). Quelques points, traités par M. Groneman, me paraissant encore discutables, et quelques autres de ses remarques étant fondées sur des malentendus, probablement à cause de la langue peu connue, dont je me suis servi dans l'article de 1878, j'ai cru devoir faire quelques remarques contraires, d'autant plus que le phénomène intéressant dont il s'agit, mérite d'être traité de plusieurs côtés.

En premier lieu je remarquerai que le but de mon article n'était pas de discuter les observations de Jones, que je n'ai pas vues, ni de donner une critique complète de la discussion de Serpieri, que je n'ai que touchée (en 4 pages de 34) sur



les points les plus saillants et le plus intimement liés à ses deux conclusions définitives, savoir:

1. La lumière zodiacale est un phénomène terrestre.
2. Elle est de la nature des aurores polaires.

Quant à la dernière thèse, je ne la traiterai pas ici, parce que M. Groneman s'est déclaré d'accord avec moi à cet égard.

Avant d'entrer dans les détails je me permettrai de faire une remarque générale. On trouve quelquefois dans l'Astronomie une difficulté qui consiste en ce que quelques observateurs ont vu ou croient avoir vu quelque chose que les autres n'ont jamais réussi à voir, quoique ils y aient porté leur attention spéciale et qu'ils se soient trouvés dans des circonstances égales ou même plus favorables pour faire l'observation. La difficulté, toujours grande, s'il s'agit de prouver quelque chose par des évidences négatives, s'accroît encore quand il y a un homme d'autorité dans la minorité affirmative. Par exemple, le satellite de Vénus, qui n'a pas été vu depuis 1764, a donné occasion en 1875 à un livre intéressant de 185 pages où son existence est maintenue; les quatre satellites d'Uranus que Sir William Herschel croyait avoir vus en 1790 et 1794, mais qui n'ont pas été revus depuis, ont trouvé en 1870 un habile défenseur en M. Proctor, malgré la découverte de deux satellites intérieurs, que Herschel n'avait jamais vus; la planète intra-mercurielle continuera probablement, à cause du nom de Watson, à paraître dans les livres pendant plusieurs dizaines d'années, même si elle ne paraît pas sur le ciel. (Le compagnon visible de Procyon est heureusement redevenu invisible par le soin de l'homme qui avait cru en faire la découverte; sans cela la visibilité sans doute aurait trouvé des défenseurs malgré l'évidence négative du grand réfracteur de Washington). Outre ces cas, où il est permis de douter, j'allèguerai comme un exemple, où le doute devient certitude, une série d'observations, faites par un professeur d'Astronomie et directeur d'un observatoire, de quelques étoiles, qui culminaient à  $4^{\circ}$  sous l'horizon, la

lunette étant dirigée vers une colline qui s'élevait à  $2^{\circ}$  au-dessus de l'horizon (Astr. Nachr. t. LI pag. 52). Entre ces deux extrêmes on peut trouver dans le cours du temps une longue série d'observations, où il est certain que l'observateur a vu quelque chose, mais où l'interprétation de ce qu'il a vu est plus ou moins douteuse.

Ce n'est pas pour indiquer à M. Groneman un nouveau principe dans la méthode de discussion des observations, que je fais ces remarques; au contraire il connaît le principe très-bien et l'a appliqué lui-même; seulement ses doutes vont en sens différents des miens. Ainsi il parle dans les Mem. spett. Ital. App. 1878, p. 76, de «l'observation *prétendue* de la lumière zodiacale pendant l'éclipse totale de cette année en Amérique.» Du reste je dois ajouter qu'il admet ici la possibilité de ce qu'une partie de la lumière zodiacale puisse être d'origine cosmique. Même M. Serpieri, qui très-consciencieusement ne rejette en général aucune observation et n'admet pas que les observations puissent être sensiblement affectées par des causes externes ou accidentelles, a quelquefois des doutes; c'est du moins la seule manière, dont je peux m'expliquer le fait, qu'il n'a pas traité les observations de Jones de la lumière zodiacale *lunaire* avec le même soin que les autres observations; car certainement l'existence d'une L. Z. lunaire doit être de la plus grande importance pour la théorie de la lumière ordinaire.

Le but de ces remarques est de me justifier par l'histoire de la science, si je me sers quelquefois d'évidences négatives pour défendre un doute de l'interprétation de MM. Serpieri et Groneman en certains cas, où il y a certainement des causes externes qui peuvent influencer sur le phénomène.

## II.

Je commencerai par les *pulsations* et quelques autres singularités qui constituent ce que M. Groneman appelle «le caractère capricieux» du phénomène. Les pulsations sont classées

par Serpieri, d'après les observations de Jones, en trois ordres; il parle aussi, à propos de quelques observations de Humboldt, d'un quatrième ordre, dont il trouve cependant possible l'identité avec le premier. Outre ces observations M. Groneman cite une d'Arago; une de Birt et de Lowe (d'après l'ouvrage de Jones); plusieurs non spécifiées d'Arcimis; et enfin trois de Jul. Schmidt. Pour les deux derniers observateurs il faut pourtant ajouter, qu'ils n'ont pas eu la même opinion que M. Groneman sur l'explication du phénomène; les paroles de M. Arcimis, citées par Groneman, sont: «La L. Z. m'a souvent offert dans toute son étendue un mouvement vibratoire; mais je n'oserais affirmer que cela ne provînt pas d'une faiblesse de mes yeux» — —. Deux des observations de M. Schmidt, celles du 13 janvier et du 15 mars 1850, sont accompagnées de la remarque, qu'il attribuait les variations de la L. Z. à des petites variations de la transparence de l'air (pour le 15 mars la remarque est omise dans la citation de M. Groneman); la troisième observation, celle du 22 janvier 1851, dont on trouve p. 20 de la brochure de M. Groneman une traduction, qui ne me paraît pas tout-à-fait exacte, est dans l'original exprimée ainsi: «Sehr heitere Luft, das Z. glänzt in veränderlicher Intensität stark an seiner Basis.»

J'ai suppléé les citations des observations de M. Schmidt parce qu'il me paraît intéressant de connaître non seulement les observations mais aussi l'opinion de cet observateur célèbre. Il faut aussi remarquer que les observations, parmi lesquelles se trouvent ces trois, sont au nombre de 131.

Quand il s'agit de produire des observations de sens contraire et de poids suffisant pour prouver quelque chose, je ne mentionnerai pas les miennes et celles de beaucoup d'autres observateurs ordinaires, parce qu'on pourrait dire de bon droit, que nous n'avons pas eu le temps d'observer la L. Z. que par occasion, que nous n'avons pu travailler dans des conditions aussi favorables que Jones, etc. De la brochure de M. Groneman

je crois pouvoir conclure que *Heis*, l'homme aux yeux célèbres, n'a pas vu de pulsations pendant ses observations de 29 ans. N'ayant pas vu le livre, où il a publié ses observations, je n'en peux dire davantage. Mais il y a une série d'observations de M. *Lewis* à Germantown aux États-Unis, dont on trouve un aperçu dans «The American Journal of Science», 1880 (mentionnée aussi par M. Groneman dans le Supplément de sa brochure) et qui mérite la plus grande attention, non seulement parce que les observations ont été faites en grand nombre, pendant cinq années, sous la latitude de  $40^{\circ}$ , par un homme qui a souvent vu douze étoiles dans les Pléiades à l'oeil nu, mais surtout *parce que l'observateur a fait tout ce qu'il a pu pour délivrer les observations d'erreurs systématiques et accidentelles*:

«The discordant results obtained by different observers have induced the writer to take special precautions in his method of observation. — In order to train the eye to more acute vision, it has been customary before each observation to use it in the detection of stars of the sixth magnitude and under. It has been found that such practice is not only a good preparation for accurate observing, but that an idea of the comparative transparency of the atmosphere is thus obtained. In all cases the observations were made in perfect darkness, and recorded as soon after as possible.»

Concernant l'objet dont il s'agit ici, M. *Lewis* dit:

«Careful watch has been made for any pulsations in the zodiacal cone. Although aware of the statements of some observers as to their existence, the writer, during the whole of his observations, has never once been able to detect any certain pulsations, any movement, or any sudden change in brightness in any part of the zodiacal light; and he believes that all such apparent effects are due either to Atmospheric changes or to changes in the eyesight of the observer. Since frequently an apparent diminution in brightness ensues after the observer has been looking at another part of the sky, and



«especially after recording a note by lamplight, it has been  
 «found necessary to compare directly the brightness of the cone  
 «at a certain altitude with a definite portion of the Via Lactea;  
 «and it was then always noticed that the diminution in bright-  
 «ness of the zodiacal cone was accompanied by a corresponding  
 «change in the Via Lactea. Any change in the transparency  
 «of the atmosphere or in personal judgment affects equally  
 «both phenomena»<sup>1</sup>).

J'ajouterai encore les paroles finales de l'aperçu:

«No theory is advanced in the present paper, and, as the  
 «observations are being continued, these partial results alone  
 «are presented as a contribution to the store of facts already  
 «collected on this interesting phenomenon.»

Il serait à désirer que les détails de ces observations fussent bientôt publiés.

Quant à la comparaison de la L. Z. avec la voie lactée et avec des étoiles faibles, pour les observations de Jones, j'en ai dit en 1878 quelques paroles, dont on trouve aux p. 14—15 de la brochure de Groneman une traduction qui est essentielle-

---

<sup>1</sup>) M. Groneman croit avoir trouvé une contradiction entre cette dernière phrase et un autre passage de l'aperçu, où l'auteur comme preuve du «penetrating power» de la lumière du cône zodiacal, dit que des conditions atmosphériques défavorables avaient eu plus d'influence sur la voie lactée que sur la L. Z. On voit que cela dépend du sens du mot «equally»; s'il signifie «de la même quantité», M. Groneman a raison, mais s'il ne signifie que «de la même manière», il n'y a pas de contradiction.

A. p. 26 M. Groneman exprime son étonnement de ce que Jones a quelquefois observé la L. Z. très-bien sur un ciel brumeux: «Il nous avait paru extrêmement étrange, en lisant ces passages, qu'une apparition aussi sensible et aussi faible que la L. Z. n'eût pas été facilement effacée, même par le brouillard le plus léger.» Cependant ce qui constitue le caractère délicat du phénomène, ce n'est pas l'éclat, qui est, dans les parties centrales et en des élongations médiocres, très-souvent, d'après les expériences de tous les observateurs, bien plus grand que celui de la voie lactée; mais ce sont les nuances d'éclat et les contours.

ment correcte<sup>1)</sup>. Chez Serpieri je n'avais pas trouvé de réponse à la question: Est ce que Jones a dirigé simultanément son attention sur la voie lactée? Maintenant M. Groneman me donne l'information demandée; il dit:

«Un observateur aussi attentif que Jones n'aurait pas manqué de noter des pulsations dans la Voie Lactée — qu'il examinait en même temps, comme les cartes l'attestent — si ces pulsations y avaient réellement eu lieu à ce moment.»

N'ayant pas vu les cartes je ne sais pas, de quelle manière elles l'attestent; mais s'il ne consiste qu'en ce que la L. Z. croise la voie lactée les jours où Jones observait les pulsations, l'attestation ne me paraît pas suffisante; car certainement, observer une L. Z. qui croise la voie lactée, c'est tout autre chose que de diriger l'attention spécialement sur celle-ci pour s'assurer, si elle subit des changements d'éclat ou non. Et je maintiens qu'on aura besoin de grande attention, parce qu'il est seulement pour l'éclat que des changements de la transparence de l'air ou de la sensibilité des yeux peuvent influer de la même manière sur la L. Z. et sur la voie lactée, tandis qu'il en est autrement pour l'étendue, à cause de la nature différente des contours. C'est aussi seulement pour l'éclat que M. Lewis a trouvé que les dits changements influent également sur les deux phénomènes. Une attestation directe en *mots* aurait été bien préférable à celle des cartes.

D'après cela il me semble *au moins* possible, qu'il puisse être question d'influences accidentelles pour ces observations de Jones; et il ne s'agit que de la possibilité, car c'est la possibilité que nient MM. Serpieri et Groneman.

Parmi les observations citées de M. Groneman, où il est question de pulsations, il y a une, sur laquelle il fixe l'attention, et cela avec raison, parce qu'elle est la seule où se trouve avec

---

<sup>1)</sup> Il y a quelques inexactitudes, dont je note ici les deux premiers mots: «*Nous ignorons jusqu'à quel point*» etc., au lieu de «*Il n'est pas dit*» (par Serpieri).

certitude un essai de constater la réalité objective de ce qu'on a vu, par comparaison avec un autre objet d'apparence peu différente. *Arago*, en observant la célèbre comète de 1843, a profité de l'occasion pour faire aussi au mois de mars 1843 quelques observations de la L. Z. Le 28 mars il dit qu'elle avait la cime aux environs des Pléiades, et puis :

« La L. Z. nous a paru sujette à des changements brusques d'intensité. Y a-t-il là une illusion dépendante d'un changement dans la diaphanéité de l'atmosphère ? De pareilles intermittences ne se remarquaient pas dans la queue de la comète. »

Enfin il donne la largeur de la L. Z. à 8 heures du soir.

Comme objet de comparaison la comète avait l'avantage d'être à peu près du même éclat que la L. Z. ; le 27 mars *Arago* l'avait trouvée un peu plus faible que la partie centrale de celle-ci. Cependant son peu de largeur, qu' *Arago* avait trouvée le 18 et 19 mars de  $1^{\circ} 15'$ , et surtout sa proximité de l'horizon doit l'avoir rendue moins propre à des observations délicates. Le 28 mars la comète s'étendait d'Eridan au-dessous de  $\beta$  et  $\kappa$  d'Orion ; déjà à 7 heures et demie la tête n'était que de  $13^{\circ}$  au-dessus de l'horizon de Paris, tandis que la hauteur de l'extrémité de la queue était environ de  $24^{\circ}$ , si l'on en suppose la longueur égale à  $40^{\circ}$ , ce qui est probablement trop ; car à Paris la plus grande valeur observée depuis le 17 mars fut de  $43^{\circ}$ , et la comète devenait invisible au milieu du mois d'avril.

Vis-à-vis des mesures de précaution prises par M. Lewis dans des comparaisons pareilles, il faut admettre que cette observation n'aura pas beaucoup de poids.

Je crois pouvoir me dispenser de discuter séparément les observations qui tendent à constater le caractère capricieux de la L. Z. ; pour une d'elles, faite par M. Groneman lui-même, l'observateur admet la possibilité d'une illusion ; une autre, celle de M. Piazzi Smyth, a le défaut de ne pas donner en nombres les heures d'observation et l'étendue de l'arc crépusculaire observé.

Seulement je remarquerai qu'une partie des observations citées dans ce chapitre, consiste en ce que les observateurs ont trouvé quelquefois l'éclat du cône moindre qu'ils n'avaient attendu, tandis que quelquefois il ont vu la L. Z. à des élongations extraordinaires. A cet égard il suffit de dire qu'une théorie cosmique n'exige point l'invariabilité du phénomène; car la terre se meut, et la matière réfléchissant la lumière du soleil se meut encore plus vite en des orbites excentriques.

Du reste il paraît que les observations des pulsations ne peuvent pas être d'importance décisive pour M. Groneman à l'égard du choix entre une théorie terrestre ou cosmique de la L. Z.; car si je n'ai pas mal entendu ses paroles p. 21, il est d'avis que les intermittences d'éclat quelquefois observées dans les queues cométaires ont été réelles. Je suppose qu'il ne tient pas les queues des comètes pour un phénomène atmosphérique.

### III.

M. Serpieri distingue, d'après les observations de Jones, entre deux parties du cône zodiacal, la lumière centrale (*Stronger light* de Jones) et la lumière diffuse (*diffuse light*); quelquefois il distingue la partie plus dense et plus basse de la lumière centrale sous le nom de lumière éclatante (*effulgent light*), et la partie la plus faible de la lumière diffuse sous le nom de lumière pâle (*dim or paled sky*).

Or rien n'est plus naturel que ce qu'un observateur se sert d'une telle division pour faciliter la description du phénomène, et l'on trouve aussi, si non la même division, pourtant la même méthode chez d'autres observateurs. M. Lewis divise la L. Z. totale en trois parties: *the Zodiacal Cone*, *the Zodiacal band* (lueur tout le long du zodiaque) et *the Gegenschein*. Puis en décrivant le cône zodiacal il dit:

«At the period of its maximum brightness an *inner cone* «of much greater brilliancy can be detected near the horizon. «This short inner cone is less pointed in shape than the outer



«one, although fading by degrees into it. It is many times  
«brighter than the Via Lactea, and it is slightly colored by  
«atmospheric absorption.»

D'après cette description le cône intérieur cadre le mieux avec la lumière éclatante de Jones, tandis que les trois autres parties du cône ne sont pas mentionnées par M. Lewis.

Un tel désaccord ne peut pas frapper. Ce qui est fondé dans la nature à cet égard, c'est que dans une section transversale du cône on trouve, entre le maximum d'éclat du milieu et la lueur évanésciente du bord, une partie de plus grande variation d'éclat; mais évidemment s'il s'agit de tirer une limite linéaire (et encore davantage, si l'on veut en tirer plusieurs) il n'y a plus question que de choix arbitraire, où l'on n'a, même pour un seul observateur, que peu de garantie de la constance du jugement dans des conditions changées.

Comme Lewis l'a fait pour le *inner cone*, Jones se réserve expressément contre la supposition que les limites soient bien définies (Serpieri, Mem. spett. ital. App. 1876, p. 56). Même sur le beau dessin, que M. Groneman a publié dans les Mem. spett. ital. 1879, et qui est le meilleur que j'aie vu, les contours et les nuances ne me paraissent pas assez délicates; pour les contours, c'est, selon la note de M. Groneman, la faute du lithographe. D'après tout ce que j'ai vu de la lumière zodiacale, il doit être presque aussi difficile d'en faire un dessin conforme à la nature, que de reproduire artificiellement les nuances des couleurs du spectre solaire.

Malheureusement Jones, devant figurer sur ses cartes les limites des quatre parties du cône zodiacal, les a dessinées en lignes; c'est peut-être cette circonstance qui a induit M. Serpieri à pousser les distinctions trop loin; il a pris comme indisputable que ces limites sont toujours tirées entre les mêmes degrés d'éclat. Mais ce qui l'a décidément conduit à des fausses conclusions, c'est que quelquefois *il n'a pas considéré la possibilité de ce qu'une partie du cône puisse, dans des conditions chan-*

gées, se montrer avec l'éclat d'une partie voisine, ou, ce qui revient au même, que les limites puissent varier avec les circonstances externes. Nous reviendrons à ce point.

#### IV.

Pour pouvoir attribuer les changements d'éclat et d'étendue de la L. Z. à des causes inhérentes, il est évidemment nécessaire de s'assurer de l'invariabilité de trois choses, savoir

de la sensibilité de l'oeil,

de la transparence de l'air,

de l'obscurité du ciel.

Quant à la première, il s'entend qu'elle peut donner lieu à des difficultés dans la discussion, si l'observateur n'a pas, comme M. Lewis, pris des mesures spéciales pour se débarrasser de toute source d'erreurs à cet égard. Aussi je ne me rappelle d'avoir vu dans le traité de Serpieri aucune discussion concernant la possibilité d'une cause subjective pour les observations de Jones, quoiqu'il y ait des cas où cette possibilité est assez proche, comme l'observation suivante du matin du 8 octobre 1853 (Serp. p. 86):

«The suddenness of the change from the Zodiacal to dawn light is worthy of remark. I turned my eyes from the Z. L. in order to make some annotations, and when, after writing «but twelve words, I looked again, the light had spread, and «dawn had come. This was at 4<sup>h</sup> 34<sup>m</sup> ».

Quant aux deux autres facteurs, j'ai trouvé parmi les 45 lois, établies par M. Serpieri, 7 précédées ou accompagnées d'un raisonnement sur l'influence possible d'un air variable ou du crépuscule ou de tous les deux (outre une, où il est question de l'effet possible des changements de station); cependant pour la septième il ne consiste qu'en ce que l'auteur, à cause de la vue perçante de Heis, trouve «affatto improbabile ed anzi stolto il supporre» que Heis à Münster n'eût pas vu la L. Z. à des

élongations aussi grandes que Jones à la Mer de Chine dans les mêmes nuits, si réellement le cône avait eu la même étendue pour les deux lieux.

Mais l'auteur vient toujours au résultat que ces deux facteurs ne peuvent avoir aucune influence sensible sur les observations; la plus grande concession qu'il fait à cet égard, est la suivante, qui se trouve p. 98 à propos de la période annuelle de l'étendue de la L. Z :

«Je ne dis pas que la pureté plus grande du ciel ne contribue pas à la visibilité plus grande du phénomène et en beaucoup de cas ne le fasse pas paraître plus étendu, comme nous l'indiquent peut-être quelques moindres oscillations, notées par Jones; mais je dis que pour les ondulations plus grandes et plus marquées, qu'on voit dans les observations de Jones, la pureté du ciel n'a rien à faire, ou elle y a part seulement comme cause très-secondaire».

Même comme des causes secondaires ces choses n'ont trouvé aucune place dans le grand bâtiment de lois; d'où il s'ensuit que pratiquement l'auteur a considéré comme invariables la sensibilité des yeux de Jones, la pureté et l'obscurité du ciel, pendant toutes les nuits d'observation des deux années d'avril 1853 jusqu'en avril 1855 entre 1 heure après le coucher et 1 heure avant le lever du soleil, pour tous les lieux d'observation, qui sont compris entre  $42^{\circ}$  de lat. N. et  $54^{\circ}$  de lat. S.

Il s'entend que ce traitement sommaire ou, pour ainsi dire, statistique de la discussion de M. Serpieri ne prouve rien à l'égard de la validité de ses conclusions; seulement il me paraît que ce résultat doit attirer l'attention vis-à-vis des expériences communes sur la transparence de l'air et le crépuscule.

Il faut donc entrer en quelques détails, et je commencerai par le phénomène, dit des *phases*, et consistant en ce que le sommet du cône s'était élancé successivement le long de l'éclip-

tique le soir, non pas toujours, mais d'après 78 pour cent des observations de la lumière centrale et d'après 59 p. c. des observations de la lumière diffuse, le plus fort et le plus souvent entre 1 et 2 heures après le coucher du soleil, mais souvent aussi, quoique moins fort, à des heures plus avancées. Le matin le procès invers était observé en 68 p. c. des cas pour la lumière centrale et en 39 p. c. des cas pour la lumière diffuse.

Dans l'article de 1878 je n'ai pas touché aux conclusions fondées sur la distinction des deux cônes comme deux phénomènes essentiellement indépendants l'un de l'autre, parce que ce fondement bien vague aurait rendu nécessaire une discussion trop ample pour mon but alors: mais j'ai mentionné une conclusion, qui revient aussi vers la fin de l'ouvrage de Serpieri, savoir, que la L. Z. serait liée à la terre. Je crois devoir donner ici dans la langue originale le passage dont il s'agit:

«Investigando nei disegni del Jones l'andamento delle fasi, «di cui ho dati i valori medi, fui sempre sorpreso di vedere, «che mentre il cono saliva camminando su a ritroso delle stelle, «senza spogliarsi dell'aureola di luce diffusa e senza troppo can- «giare la sua figura, anche l'orizzonte all'istesso tempo s'innal- «zava su per le stelle con moti e spostamenti tali, che avevano «sensibilmente l'istessa estensione di quelli del cono. Questo «fatto curiosissimo io lo formulava tra me stesso con una «espressione assai semplice, che n'esprime tutti i caratteri «apparenti; io diceva cioè: Questo cono occidentale *pare* «*attaccato alla terra!* la terra girando verso levante lo solleva «con sè, e lo fa camminare a ritroso della sfera celeste, come «le cime delle terre e dei monti. Queste mie espressioni «non erano in prima che una specie di formula empirica «bizzarramente ideata. Ma in appresso trovai non ridicolo il «concetto.

«Infatti le medie fasi di alzamento per la luce cen- «trale sono:



«da 1 <sup>h</sup> a 1 <sup>h</sup> $\frac{1}{2}$ *)	. . . . .	8°.7
«da 1 $\frac{1}{2}$ a 2	. . . . .	6°.4;
«la loro media è	. . . . .	7°.55
«che dà	. . . . .	15°.10 per ora.

«Benchè sian gradi di longitudine, ognuno intende che «corrispondono prossimamente al moto orario della sfera celeste, «e all'alzamento della base stessa del cono zodiacale posata sull'orizzonte».

Un astronome trouvera ici sans doute tout commentaire superflu; mais comme M. Groneman ne semble pas avoir vu le défaut de ce raisonnement, je remarquerai que, bien que la différence entre l'accroissement de la longitude et de l'angle horaire ou de l'ascension droite (dont il s'agit, quand le cône est comparé aux cimes des terres et des montagnes) ne soit pas d'importance pour un phénomène comme la L. Z., la différence de *direction* entre l'écliptique et un cercle parallèle à l'équateur devait pourtant être très-facilement remarquée par l'observateur. Je n'ai pas vu que M. Serpieri ait jamais trouvé les «*alzamenti*» parallèles à l'équateur, comme cela devait arriver, si la rotation diurne en avait été la cause. Quant à l'effet du crépuscule sur des observations faites entre une et deux heures après le coucher du soleil, je m'en suis prononcé en 1878; mais les remarques de M. Groneman m'obligent d'y revenir encore une fois, ce que je ferai tantôt.

Pour prouver la réalité, indépendante de causes externes, des phases, M. Groneman donne, d'accord avec M. Serpieri, quatre arguments, qu'il me sera nécessaire d'examiner pour ne pas m'exposer encore une fois au reproche d'avoir passé quelque chose sous silence.

Le premier argument consiste en ce que Jones a vu très-souvent au soir, quelque temps après le coucher du soleil, la lumière diffuse avant qu'il n'ait vu la lumière centrale. M. Gro-

\*) Les heures sont comptées du coucher du soleil.

neman discute la possibilité d'un effet du crépuscule; il suppose que le soleil s'abaisse de plus en plus sous l'horizon:

« — l'obscurité s'avance continuellement, et nous demandons: quelle partie du phénomène se montrera la première, la plus ou la moins lumineuse?

« On pourrait défendre l'opinion que si la Lumière diffuse, c'est-à-dire la partie la plus faible, paraît la première, c'est parce que l'autre est plus proche de l'horizon et éprouve ainsi, plus qu'elle, l'influence de l'absorption atmosphérique.

« Mais il n'en saurait être ainsi, car en réalité la Lumière diffuse est observée à la même elongation où se montre plus tard la Lumière centrale».

Rien n'est plus naturel, quoique la variation de l'absorption atmosphérique avec la hauteur n'ait rien à faire ici, parce qu'en général elle ne peut pas être une autre à ce temps que plus tard dans la nuit, si le ciel est serein; mais il est évident que, si, comme l'auteur le suppose, l'arc du crépuscule en s'abaissant de plus en plus, enveloppe encore une partie du cône avec sa lueur décroissante de bas en haut, comme celle de la L. Z. elle-même, alors cette partie du cône se montrera avec un éclat plus faible (c'est-à-dire comme lumière diffuse) que plus tard, quand l'arc du crépuscule se sera abaissé davantage; ou, en d'autres mots, la lumière *centrale* commence par être *diffuse* parce qu'elle ne se détache plus du ciel, encore un peu éclairé, que les parties supérieures et réellement plus faibles ne se détachent du ciel obscur; mais elle finit par briller avec toute sa splendeur, comme le *stronger* ou *effulgent light* de Jones, quand la lueur crépusculaire, en s'abaissant toujours, finit par disparaître.

On voit que c'est la considération de la lumière centrale et la lumière diffuse comme deux phénomènes indépendants l'un de l'autre, qui a produit la conclusion de MM. Serpieri et Groneman.

La différence de l'absorption atmosphérique en des hauteurs différentes a une autre influence sur une L. Z. partici-

pant au mouvement diurne du ciel, savoir de la faire disparaître plus soudainement, que si l'absorption avait été la même à toutes les hauteurs; le matin elle a l'effet, qu'on ne peut pas voir le cône se lever, comme le soleil ou la lune, mais qu'il commence par paraître à une certaine hauteur. Cette circonstance, qui est ainsi très-naturelle, semble avoir étonné quelques observateurs.

Le deuxième argument est si intimement lié au premier, qu'il ne sera pas nécessaire d'y entrer. Il consiste en ce qu'on n'a jamais vu «que le cône central s'élève jusqu'à la cime du manteau de la lumière diffuse, ou qu'il la traverse et la surpasse» et puis que «les phases les plus fortes et les plus rapides sont celles du cône le plus dense et le plus lumineux». On voit que ces résultats des observations sont en plein accord avec ce qui est dit ci-dessus.

Comme troisième argument M. Groneman donne, sans phrase, «la régularité des phases sous toutes les latitudes géographiques» où Jones a été — ce qui ne prouve rien à l'égard de l'origine du phénomène. En passant il mentionne, avec Serpieri, «le phénomène de ces «pulsations», qui ne se montrent que dans la Lumière centrale, tandis que la Lumière diffuse demeure tranquille». Outre ce que j'ai déjà dit de la difficulté d'établir des conclusions certaines sur les observations des pulsations et sur la distinction des deux cônes, j'ajouterai que d'après les paroles de M. Groneman il pourrait sembler que des pulsations n'aient jamais été observées hors du cône central. Les renseignements donnés par Serpieri sur ce point ne sont pas sans ambiguïté; p. 68 (où se trouve le troisième argument) il appelle les pulsations «un fenomeno che è proprio della L. C.» (luce centrale); mais dans la 27ième loi (cc) il dit: «Spesse volte il cono zodiacale, massime quello di ponente, è dominato da forze contrarie intermittenti» etc., sans aucune restriction, et au commencement du chapitre XV: «Considerando le maggiori e più significanti pulsazioni, che son quelle di 1° e 2°

ordine, consistenti nel generale movimento di *tutto il cono* o di uno de' suoi lati» etc. Puis il parle, quelques lignes plus bas, des observations où le cône central avait subi des variations, tandis que la lumière diffuse avait été inaltérée; «cela se voit dans toutes les observations que j'ai citées» (au nombre de 15) «et spécialement le 31 janvier» etc. (au nombre de 8).

Or le nombre total d'observations des pulsations étant de 30 (d'après la table de Serpieri p. 123) on reste incertain à l'égard du témoignage des autres 15 observations, surtout à cause de la spécification des 8, parce que cela fait voir que les 15 observations citées ne sont pas également valides comme témoins; des citations elles-mêmes, qui sont abrégées, on ne peut rien voir à cet égard.

Il est très-naturel qu'il y a quelque incertitude ici. Il faut se rappeler que l'objet d'étude de Serpieri a été les tables numériques déduites de la réduction de 328 dessins de Jones et des notes marginales. Dans les deux citations d'observations de pulsations, où Serpieri donne les heures (p. 117 et 118), les observations se succèdent très-serrées. Pendant une de ces observations, celle du 30 janvier 1854 à Napa-Kiang, l'observateur a fait entre 7<sup>h</sup> 50<sup>m</sup> et 7<sup>h</sup> 59<sup>m</sup> $\frac{1}{2}$  huit annotations et deux alignements pour la lumière centrale, et le 25 février 1854 à Yeddo il a fait 27 annotations (chacune avec l'heure, la minute et quelquefois la demi-minute) et 4 alignements, entre 7<sup>h</sup> 14<sup>m</sup> et 7<sup>h</sup> 47<sup>m</sup>; on ne peut pas voir de la citation, s'il s'agit de la lumière centrale, mais d'après Serpieri il doit être ainsi, quoique l'observation ne soit par parmi les huit spécifiées. Maintenant, est-ce que Jones a fait *pendant* ces observations pressées aussi quelque annotation ou quelque alignement, d'où l'on peut voir avec certitude, que la lumière diffuse est restée immobile pendant le temps des pulsations du cône central? S'il se trouve parmi les observations originales quelque renseignement indubitable de cette espèce, il serait d'importance, parce que cela exclurait la possibilité d'une cause



subjective, qu'on est tenté de soupçonner par suite de l'alternation fréquente de la direction des yeux entre le ciel, la montre et le papier; alors il ne serait question que de deux causes: ou des forces internes et inconnues, ou des intermittences de la clarté des parties inférieures du ciel.

J'ajouterai que la plupart ( $\frac{2}{3}$ ) des observations se trouvent au temps des plus grandes phases, c'est-à-dire entre 1 et 2 heures après le coucher du soleil (ou avant le lever);  $\frac{9}{10}$  se trouvent entre  $1^h$  et  $2^h \frac{1}{2}$ .

Le quatrième argument est d'une nature différente et donne occasion à une remarque, qui peut aussi s'appliquer en d'autres cas. Il consiste en ce que la largeur du cône s'est souvent amoindrie pendant que sa longueur s'est augmentée, et inversement. Après avoir corrigé une erreur dans l'argumentation de Serpieri\*), M. Groneman vient au même résultat que celui-ci, en concluant comme il suit:

«Le quatrième argument conserve donc toute sa valeur, d'autant plus que la circonstance dont il s'agit ici n'est nullement une exception».

Il est à regretter que M. Groneman n'ait pas présenté le résultat numérique de la recherche spéciale qu'il a faite pour ce but dans les planches de Jones. Mais s'il est permis de regarder deux tables, que présente Serpieri p. 60 et 61, et dont M. Groneman a cité l'une, comme un *instar omnium*, on pourra conclure *a fortiori* (à cause de la différence des méthodes de mesurage des deux auteurs) à la nature des nombres

---

\*) M. Serpieri avait mesuré dans les dessins de Jones la largeur du cône, pour des heures successives, en deux points de distance donnée sous le sommet, dont l'élongation est variable à cause des phases, ce qui amène que les variations de largeur, dépendant du lieu, se mêlent à celles dépendant du temps; tandis que M. Groneman a mesuré la largeur en des élongations données. Du reste on voit que la méthode de Serpieri est le plus en accord avec le principe de regarder les deux cônes comme indépendants; il semble donc que M. Groneman ait eu ici une impression de l'inadmissibilité de ce principe.

obtenus par M. Groneman. Ces deux tables contiennent, entre autres, des nombres donnant en degrés la latitude bor. ou austr. des points choisis des deux côtés de la lumière centrale et de la lumière diffuse pour des temps successifs. Or j'ai trouvé la *moyenne numérique* de 48 différences entre deux observations consécutives égale à  $2^{\circ}.4$ , tandis que la *moyenne algébrique* est de  $0^{\circ}.23$ ; les différences se succèdent sans aucune régularité de grandeur ou de signe. La différence moyenne entre deux moments d'observation consécutifs est de  $38^m$ . Si les deux exemples cités par M. Serpieri ne sont pas tout exceptionnels, en défaveur de ce qu'il veut prouver, on peut conclure de cela, qu'il s'agit ici d'*erreurs accidentelles* d'observation et de dessin. Je crois pouvoir supposer que MM. Serpieri et Groneman ne croient pas que Jones ait pu déterminer les limites de la lumière zodiacale et puis en faire les délinéations dans les cartes sans commettre des erreurs de quelques degrés en la largeur du cône et en l'élongation du sommet.

La conclusion de M. Groneman, que la circonstance mentionnée «n'est nullement une exception», est dont très-naturelle; car s'il s'agit d'erreurs accidentelles, on peut compter sur la moitié des observations comme affirmative, et sur le résultat zéro pour le moyen des changements de largeur, s'il emploie *toutes* les observations. Cependant comme il y a aussi une source d'erreurs *systématiques*, dont on devine aisément l'origine par ce qui est dit des phases ci-dessus, M. Groneman trouvera probablement le nombre des cas favorables au quatrième argument un peu moindre que la moitié, et par conséquent en calculant toutes les observations, qui ont été employées pour démontrer l'existence des phases, une valeur différente de zéro pour la variation de largeur du cône avec le temps, mais de sens contraire, c'est-à-dire qu'un accroissement moyen de l'élongation du sommet sera accompagné d'un accroissement moyen de la largeur du cône.

Ce qui est dit ici des erreurs accidentelles peut sans doute

s'appliquer à une part des changements de la longueur du cône pendant les heures plus avancées de la nuit; mais on n'en peut rien dire de certain sans connaître toutes les observations, et la table des phases chez Serpieri ne contient que «les cas plus singuliers, où les phases rejoignent ou surpassent  $10^{\circ}$ » (p. 62). Les nombres relatifs peuvent se voir de ce tableau:

	Soir.		Matin.	
	L. C.	L. D.	L. C.	L. D.
Nombre de cas, où Serpieri a trouvé				
les dessins suffisamment complets .	169	165	136	109
Nombre de cas montrant des phases positives . . . . .	131	97	93	43
Nombre de cas dans la table . . . . .	68	35	53	27,
d'où l'on voit que la table ne contient que 32 p. c. du total.				

L'auteur présente, p. 71 et 76, deux petites tables montrant la variation moyenne de l'élongation par demi-heure, lesquelles sont fondées sur des tables plus étendues; mais on peut voir de la manière suivante, que même celles-ci n'embrassent pas toutes les observations. Les petites tables contiennent entre autres des colonnes donnant le nombre de cas de variation zéro et de variation négative, comme la suivante pour la L. C. du soir (les heures sont comptées après le coucher du soleil):

	Cas de var. zéro.
De $1^h$ à $1.^{h5}$ . . . . .	0
- $1.^{h5}$ - 2 . . . . .	3
- 2 - $2.^{h5}$ . . . . .	4
- $2.^{h5}$ - 3 . . . . .	7
- 3 - $3.^{h5}$ . . . . .	7
- $3.^{h5}$ - 4 . . . . .	7
- 4 - $4.^{h5}$ . . . . .	2
- $4.^{h5}$ - 5 . . . . .	0,

auxquels s'ajoutent 2 cas de variation négative. Or, même si toutes les demi-heures appartenaien à des nuits différentes, ce

qui est très-improbable, la somme des cas avec variation zéro et négative ne serait pas plus grande que de 32, tandis qu'il y a eu, d'après le tableau ci-dessus, 38 cas sans phases positives pour la lumière centrale le soir. Il doit donc être un certain nombre d'observations de variation zéro ou négative, qui n'ont pas été employées pour le calcul des phases moyennes.

Quoi qu'il en soit des erreurs accidentelles pour la longueur du cône, M. Serpieri nous a indiqué, dans un autre chapitre de son traité, une source d'erreurs systématiques dans ces observations pour les heures avancées de la nuit. Après avoir établi la 18ième loi (s), qui constate une étendue moyenne plus grande pour la lumière orientale que pour la lumière occidentale\*), il dit (p. 90):

«La cause qui produit et gouverne le grand phénomène, «trouverait donc le soir plus de résistance et moins de faveur «à ses opérations: et celui qui voudra voir les lumières zodiacales les plus belles et les plus développées devra les chercher après minuit au ciel oriental.

«Certainement la pureté de l'atmosphère, délivrée à minuit «d'une grande part des exhalaisons, qui se sont élevées pendant le jour, doit favoriser cette vue plus splendide; mais cela «ne peut pas produire les différences des elongations; — —»

En passant on peut remarquer que la dernière conclusion n'est de rigueur que dans la supposition, que les changements de la pureté de l'atmosphère soient symétriques aux deux côtés de minuit. Mais il est évident que, si cette admission d'une variabilité de la transparence de l'air avec les heures de la nuit avait été faite en la discussion des phases, les conclu-

---

\*) Ce résultat est intéressant comme étant contraire aux résultats de quelques autres observateurs p. e. Heis et Weber (Klein, Handbuch der Himmelsbeschreibung p. 51) et ainsi rendant probable que la différence moyenne n'est pas sensible.



sions concernant ce phénomène auraient été essentiellement modifiées.

## V.

Vient ensuite la question de l'influence du *crépuscule* sur les phases. Il semble que M. Groneman n'aille pas aussi loin que M. Serpieri, qui nie la possibilité d'aucune influence sensible sur les observations, dont il s'est servi pour le calcul des phases; pourtant je n'ai pu trouver aucune admission, de la part de M. Groneman, de la nécessité de modifier certaines conclusions, p. e. celle que j'ai citée plus haut et qui, à cause du chiffre  $15^\circ$  par heure, prouverait que le phénomène est attaché à la terre. Comme on a déjà pu voir de quelques citations, M. Serpieri a calculé l'élongation pour chaque demi-heure, commençant par 1 heure après le coucher du soleil (ou avant le lever). Les observations originales n'étant pas faites par intervalles réguliers, il doit avoir employé les environnantes, p. e. pour  $1^h$  les observations entre  $0^h45^m$  et  $1^h15^m$  etc. Quand il y a eu des intervalles plus longs, il a interpolé (p. 62).

L'assurance de M. Serpieri en se croyant libre des effets du crépuscule à des heures si proches au coucher et au lever du soleil — assurance fondée sur le renseignement de Kämtz que la durée du crépuscule (civil) dans les contrées tropicales est d'un quart d'heure — me paraît un peu étrange, parce que M. Serpieri lui-même a cité quelques observations matinales, où Jones donne l'heure du commencement du crépuscule et d'où l'on peut voir que la durée a beaucoup surpassé une heure. Ainsi pour l'observation du 8 octobre 1853, lat.  $22^\circ 11' N$ , (mentionnée ci-dessus) Serpieri a trouvé l'heure du lever du soleil égale à  $5^h 57.^m5$ , tandis que Jones dit, que déjà à  $4^h 34^m$  «the light had spread and dawn had come»; déjà à  $1^h 23^m$  avant le lever du soleil le crépuscule fut donc assez fort pour pouvoir disperser la lumière zodiacale. On trouve plusieurs exemples de la même sorte chez Serpieri p. 86.

M. Groneman traite la question dans une note sous le texte p. 16 de sa brochure. J'en reproduirai ici les remarques finales:

«Du reste, Alex. de Humboldt cite des cas où la voûte céleste était totalement obscure trois quarts d'heure après le coucher du soleil. Nous-même avons observé la disparition de tout crépuscule notable par un abaissement du soleil au-dessous de l'horizon de  $13^{\circ} 50'$ . Ainsi le chiffre de  $16^{\circ}$ , accepté par M. Geelmuyden et déduit d'une seule détermination de Lacaille en 1751 (Arago *Astr. pop.* III, 186), n'est point du tout certain, et varie probablement d'un jour à l'autre».

La dernière remarque est erronée; non seulement l'observation de Lacaille m'a été inconnue (la référence à l'*Astr. pop.* n'est pas de moi), mais j'ai donné dans l'article de 1878 la raison pourquoi j'ai employé le chiffre de  $16^{\circ}$  comme un *minimum* de valeur, au lieu de la valeur de  $18^{\circ}$ , très-souvent adoptée en des cas pareils depuis les anciens temps, quoique j'eusse raison de croire que la dernière valeur était la plus correcte, au moins pour des latitudes plus boréales.

Les premières pages de mon traité de 1878 s'occupent, outre de la description de la L. Z., des conditions de la meilleure visibilité du phénomène, ce qui est naturellement indépendant de toute théorie. D'après l'expérience commune que la L. Z. se trouve au zodiaque, et que sa splendeur (outre des conditions atmosphériques, qui ne sont pas objet de calcul) dépend du moment où le crépuscule a fini, j'ai donné une planche qu'on pourrait appeler une éphéméride graphique pour toute l'année et pour quatre latitudes, montrant la hauteur\*) du sommet au moment que la hauteur du soleil est de

---

\*) Le calcul de la hauteur du sommet exige naturellement une élongation donnée du soleil, pour laquelle j'ai adopté  $70^{\circ}$  comme une valeur moyenne pour des yeux ordinaires. Quand M. Groneman remarque p. 47 que j'ai dit, que les grandes élongations jusqu'à  $180^{\circ}$  sont trop rares pour qu'on y fasse attention (ce qui n'est pas, du reste, une reproduction exacte de mes paroles), on pourrait croire d'après le con-

—  $16^{\circ}$ . Cette valeur a été choisie, comme je l'ai dit expressément, d'après les observations nombreuses de Schmidt à Athènes.

On trouve dans les *Astr. Nachr.* t. 63 la discussion de ces observations. L'auteur donne p. 114 pour chaque mois la valeur moyenne de l'abaissement du soleil à la fin du crépuscule. La moyenne pour le semestre avril—septembre est de  $15^{\circ}.8$ , pour octobre—mars de  $16^{\circ}.6$ , et pour l'année de  $16^{\circ}.2$ . En passant je remarquerai que la valeur moyenne annuelle de  $15^{\circ}.92$ , donnée par M. Schmidt, semble être déduite en donnant à chaque mois un poids différent d'après le nombre d'observations (il y a 130 observations pour le semestre d'été, 40 pour celui d'hiver), ce qui n'est correct qu'en considérant les différences entre les valeurs mensuelles comme accidentelles; mais M. Schmidt s'est servi ensuite de ces différences, qui font voir une marche assez régulière, pour le calcul d'une période annuelle de la hauteur de l'atmosphère.

Cependant M. Schmidt a dirigé lui-même l'attention sur une autre circonstance qui est d'une plus grande importance pour le résultat; c'est précisément la présence de la lumière zodiacale, qui ne manque jamais au moment de disparition de l'arc du crépuscule. Il serait trop long de reproduire ici ses remarques (p. 111—113) sur les difficultés qu'il a éprouvées par cette raison et sur la manière de s'en débarrasser, et je me bornerai à y renvoyer; seulement je ferai observer que le jugement du moment cherché est en partie fondé sur le changement de *couleur* de la base de la L. Z.

Or sous nos latitudes plus boréales nous avons l'avantage

---

texte que j'ai voulu exempter une *théorie* de la L. Z. de rendre compte des grandes élongations; mais c'est seulement en faisant les calculs pour la planche que j'ai dit quelque chose de pareil. A la remarque de M. Groneman que Jones a vu la L. Z. annulaire chaque nuit à Quito, je n'ai donc qu'à répondre que ma planche n'a pas été spécialement construite pour les habitants de Quito, bien qu'elle ait aussi une courbe pour l'équateur.

de pouvoir voir, pendant une partie de l'année, l'arc du crépuscule complètement débarrassé de la lumière zodiacale. Déjà en 1878 j'avais fait une observation, donc le résultat fut mieux d'accord avec la valeur ancienne de  $18^\circ$  qu'avec celle de  $16^\circ$ . Depuis j'en ai fait quelques autres, que je donnerai ici en détail; elles sont toutes faites environ le temps où le crépuscule d'été commence ou finit, ce qui a l'avantage de donner avec grande sûreté une *limite inférieure* de l'abaissement du soleil au moment de la fin du crépuscule, bien qu'on ne puisse pas effectuer la détermination de la valeur même sans porter la hauteur observée de l'arc dans le calcul. Comme le contour de cet arc est au moins aussi indécis que celui de la L. Z., la hauteur ne peut pas être trouvée exactement; en général j'ai indiqué le minimum de valeur.

Après chaque observation j'ai ajouté la hauteur de l'arc (h) et la hauteur du soleil (H). La latitude de Christiania est de  $59^\circ 55'$ .

1878 Avril 22. A minuit crépuscule visible au Nord, tel que le bord inférieur de la voie lactée est effacé de l'horizon jusqu'au grand amas de Persée.  $h = 26^\circ$ ,  $H = -17^\circ 41'$ .

Août 24. A minuit l'arc du crépuscule visible au N. au moins jusqu'entre  $\kappa$  et  $\mu$  de la Grande Ourse. La limite est difficile à voir à cause de nuages un peu plus haut. La lune, qui sera nouvelle dans 3 jours  $\frac{1}{4}$ , s'approche de son lever, mais ne produit qu'une faible augmentation de la lumière dans l'extrémité orientale de l'arc.  $h = 16^\circ$ ,  $H = -19^\circ 11'$ .

Août 28. A  $11^h 40^m$  trace de crépuscule au N, mais beaucoup plus faible que le 24 août. L'air impur à l'horizon.  $H = -20^\circ 27'$ .

Août 29. Je crois encore aujourd'hui pouvoir entrevoir le crépuscule au N. à minuit; pourtant il est difficile de comparer l'horizon en directions différentes à cause de nuages.  $H = -20^\circ 55'$ .



1879 Avril 18. A  $11^h \frac{3}{4}$  le crépuscule visible au NNO jusqu'à la hauteur de  $\alpha$  Persée ou peut-être à celle de la Chèvre.  $h = 21^\circ$  ( $\alpha$  Persée),  $H = -19^\circ 2'$ .

Août 23. A minuit crépuscule faible visible au N. au moins jusqu'à  $\lambda$  Grande Ourse.  $h = 13^\circ$ ,  $H = -18^\circ 45'$ .

1881. Août 23. A minuit l'arc du crépuscule visible au N. au moins jusqu'à la hauteur de  $\psi$  Grande Ourse.  $h = 16^\circ$ ,  $H = -18^\circ 55'$ .

Bien que ces observations ne soient pas nombreuses — ce qui est une conséquence de la condition choisie d'employer une circonstance qui ne dure que quelques jours de l'année, et des conditions nécessaires: absence de la Lune et de l'aurore boréale — elles sont néanmoins suffisantes à prouver que sous la latitude de  $60^\circ$  on peut observer le crépuscule non seulement quand l'abaissement du soleil est de  $18^\circ$ , mais au moins jusqu'à  $20^\circ$ . J'ajouterai que l'horizon à Christiania est limité vers le Nord par une montagne (à la distance d'environ de dix kilomètres) qui s'élève un peu au-dessus de l'horizon astronomique.

De l'autre côté nous avons les observations de Humboldt et celle de Groneman, citées ci-dessus; cependant la dernière, qui constate la disparition de tout crépuscule notable par un abaissement du soleil de  $13^\circ 50'$ , perd beaucoup de précision à cause de l'addition du mot «notable». Les observations de Humboldt, telles qu'elles sont citées par M. Groneman, paraissent très-étonnantes; en effet un ciel complètement obscur, sans lumière zodiacale et sans crépuscule, trois quarts d'heure après la disparition du soleil dans la mer (ce qui donne, dans les conditions données, un abaissement de  $12^\circ$ ) et puis, un quart d'heure plus tard, l'apparition soudaine de la L. Z. en grand éclat, cela s'approche du merveilleux, vis-à-vis des expériences communes. Cependant on en trouvera peut-être l'explication par la suivante citation complète (Kosmos I, p. 143):

«Seit 3 oder 4 Nächten (zwischen  $10^\circ$  und  $14^\circ$  nördlicher

«Breite) sehe ich das Zodiacallicht in einer Pracht, wie es  
 «mir nie noch erschienen ist. In diesem Theile der Südsee  
 «ist, auch nach dem Glanze der Gestirne und Nebelflecke zu  
 «urtheilen, die Durchsichtigkeit der Atmosphäre wundervoll  
 «gross. Vom 14 bis 19 März war sehr regelmässig  $\frac{3}{4}$  Stunden  
 «nachdem die Sonnenscheibe sich in das Meer getaucht hatte,  
 «keine Spur vom Thierkreislichte zu sehen, obgleich es völlig  
 «finster war. Eine Stunde nach Sonnenuntergang wurde es  
 «auf einmal sichtbar, in grosser Pracht zwischen Aldeba-  
 «ran und den Plejaden am 18 März 39° 5' Höhe erreichend.  
 «*Schmale langgedehnte Wolken erscheinen zerstreuet im lieblichen*  
 «*Blau, tief am Horizont, wie vor einem gelben Teppich. Die*  
 «*oberen spielen von Zeit zu Zeit in bunten Farben.* Man  
 «glaubt es sei ein zweiter Untergang der Sonne».

On voit ici encore une seconde merveille, celle d'une *coloration des nuages* par la lumière zodiacale. Ne serait-il pas possible que cette coloration fût due à un reste du crépuscule, et que la présence des nuages pût expliquer la première merveille? C'est dommage que Humboldt n'ait pas noté la position et les changements des nuages pendant le quart d'heure mentionné. En tout cas ces observations ont beaucoup besoin d'être répétées sur un ciel *sans nuages*.

D'après ce qui précède, il est certain que le crépuscule a eu de l'influence sur les observations de Jones, dont s'est servi Serpieri pour calculer les plus grandes phases; mais il est difficile de savoir jusqu'à quel degré cette influence s'est montrée, parce qu'il est possible que la durée du crépuscule ne soit pas la même sous toutes les latitudes, et qu'elle puisse varier de temps à autre. Cependant pour la possibilité d'une durée si courte que celle que M. Groneman trouve probable, on a besoin de meilleures preuves que celles qu'il a fournies. Il serait à désirer que de telles observations fussent faites sous des latitudes différentes, où l'on n'a pas la difficulté produite par la présence de la L. Z. pendant toute l'année comme

à Athènes (selon Schmidt) et naturellement encore plus dans les pays tropicaux.

On pourrait peut-être objecter que, même s'il y a sur le ciel un arc de crépuscule jusqu'à une hauteur de  $30^\circ$  ou  $40^\circ$  pour un abaissement du soleil de  $16^\circ$ , cela ne peut avoir aucune influence sur les parties plus élevées de la L. Z. Mais il faut considérer que le contour extrêmement vague de cet arc en rend la détermination exacte difficile, et qu'il est très-bien possible que précisément des observations assidues du cône zodiacal soient un meilleur moyen pour faire perceptibles les dernières traces de la lueur crépusculaire, que la comparaison directe des parties différentes du ciel. On voit que cela n'est indiqué que comme une possibilité, qui est cependant appuyée par le fait que la hauteur de l'atmosphère, calculée d'après les observations ordinaires du crépuscule, est de beaucoup inférieure à celle que donnent les observations des étoiles filantes. Ainsi Schmidt a trouvé par ses observations du crépuscule une hauteur moyenne de 8.7 milles géographiques, tandis que les Léonides, selon Newton à New-Haven, ont commencé à 21 milles et fini à 13 milles au-dessus de la terre.

## VI.

Jones et beaucoup d'autres observateurs ont constaté le fait, que l'axe du cône zodiacal, défini comme la ligne du milieu entre les deux bords, est en général situé un peu au-dessus de l'écliptique, soit que celle-ci soit inclinée vers le sud ou vers le nord. M. Lewis a aussi déterminé la position de la ligne du plus grand éclat; il donne le résultat en ces paroles:

«Its axis of greatest brightness does not correspond with  
«its axis of symmetry, but lies south of it. There is a very  
«small angle between these two axes. The axis of greatest  
«brightness appears to lie precisely upon the ecliptic. The

«lateral extension of the base of the zodiacal cone, often observed, is probably a purely atmospheric effect».

M. Groneman conteste que ce déplacement de l'axe puisse être un effet de la variation de l'absorption atmosphérique avec la hauteur. Bien qu'il admette (p. 39) qu'il y a certainement une différence entre l'absorption des deux flancs, surtout quand le cône s'incline notablement vers l'horizon, et que cela aura la conséquence d'effacer les parties plus faibles du phénomène, situées du côté vers lequel l'axe s'incline — ce qui évidemment revient à admettre que la ligne du milieu sera déplacée vers le bord supérieur — il en veut faire une exception pour le sommet. Mais cette exception ne serait admissible que si le sommet eût été une pointe bien définie. Du reste il faut remarquer une circonstance importante, qui saute immédiatement aux yeux dans les tables citées par M. Groneman (p. 35, 36), savoir que la déviation du sommet est *moindre* que celle des points inférieurs de l'axe, ou que l'axe et l'écliptique convergent de bas en haut. Parmi les huit résultats présentés dans les tables, dont quatre sont déduits chacun de plus de 100 observations, il n'y a qu'un seul qui fait voir une divergence; mais celui-ci n'est déduit que de 4 observations. Un autre, déduit de 18 observations, montre une latitude boréale de  $1^{\circ}.0$  pour le sommet et de  $0^{\circ}.05$  pour le point de l'axe à  $40^{\circ}$  sous le sommet, donc un déplacement plus grand pour le sommet; mais comme les observations ont été faites sur l'hémisphère australe, on voit que la convergence y est, ou que les parties inférieures de l'axe sont plus élevées que les parties supérieures.

M. Lewis aussi a trouvé que l'axe de symétrie fait un petit angle avec l'écliptique; il n'a pas indiqué la place du sommet de l'angle, mais quand nous aurons le détail de ses observations, nous verrons sans doute que l'axe et l'écliptique convergent de l'horizon vers un point plus haut, comme d'après les observations de Jones.



Pour »renverser absolument« cette explication, que j'ai donnée en peu de mots en 1878, M. Groneman présente l'argument suivant :

«En effet, là où l'écliptique céleste paraît à peu près perpendiculaire à l'horizon, l'axe de la Pyramide, lorsqu'il se déplace vers le nord ou vers le sud, indique presque toujours que l'observateur se meut vers le même côté de l'équateur. Or cette position perpendiculaire ou presque perpendiculaire de la Pyramide Zodiacale exclut toute influence de l'absorption atmosphérique».

Évidemment les petits déplacements dont il s'agit ici ne peuvent résulter avec évidence que d'un nombre bien grand d'observations; ainsi on a vu que même la moyenne des 18 observations matinales du cône central, citée par M. Groneman et mentionnée ci-dessus, fait une exception de la règle générale, qu'un observateur placé sur l'hémisphère australe voit l'axe entier du cône sur le côté austral de l'écliptique, quoique l'angle que l'axe fait avec l'écliptique soit complètement concordant aux conséquences de l'absorption.

Il suffira donc de commenter les paroles de M. Groneman par les chiffres suivants :

Sous l'équateur l'angle que fait l'écliptique avec l'horizon, varie chaque jour de  $90^{\circ}$  à  $66^{\circ}.5$  vers le sud et vers le nord; sous les cercles tropicaux il varie chaque jour entre  $90^{\circ}$  et  $43^{\circ}$ . Puis, des deux ans où Jones a observé, il n'y a qu'environ 30 jours qu'il a passé entre  $10^{\circ}$  de lat. N. et S.; pendant 22 mois il a été en dehors des cercles de  $20^{\circ}$  de latitude, et pendant plus de 13 mois en dehors des cercles tropicaux.

On voit que l'argument fourni par la position perpendiculaire ou presque perpendiculaire de l'écliptique, n'est pas suffisamment renversant.

Il semble que M. Groneman n'ait pas toujours considéré l'effet de la variation diurne de l'inclinaison entre l'écliptique et l'horizon sur l'apparence de la lumière zodiacale. P. 24

il cite une observation du 1 décembre 1874, où «à 10<sup>h</sup> 15<sup>m</sup> nous vîmes à l'Ouest une pyramide lumineuse reposant par sa large base sur l'horizon, exactement comme cela aurait dû arriver environ une heure après le coucher du soleil». Mais cela n'aurait pas dû arriver, si le cône participe au mouvement diurne du ciel; car à 5 heures l'écliptique ne s'élevait que de 30° au dessus de l'horizon de Groningue, tandis qu'à 10 heures l'angle fut de 55°. Il n'y a pas d'autre chose extraordinaire à cette observation que la grande élongation du sommet.

## VII.

La dernière et plus grande partie de mon article de 1878, qui contient une recherche déductive, basée sur l'analogie bien constatée entre les comètes et les corpuscules donnant des étoiles filantes (les météorites) au point de vue des orbites, a été touchée par M. Groneman en quelques remarques p. 48, qui cependant font voir qu'il n'a pas trouvé le point du raisonnement, probablement à cause de la langue. Comme aussi les noms de »hypothèse planétaire« et »théorie de Fatio de Duillier«, employés par M. Groneman, ne sont pas très-aptés à faire une impression correcte, je reproduirai ici la partie traitant le caractère *zodiacal* du phénomène, en omettant pourtant le commencement, où il ne s'agit que de la relation intime des orbites des comètes aux orbites des météorites, et de la conséquence, nécessairement résultant de cette relation, qu'il doit exister un groupe de météorites à courte période ayant des orbites peu inclinées sur l'écliptique, comme pour les comètes\*).

« Il pourrait sembler que le nombre des comètes aux

---

\*) D'un passage du livre de Schiaparelli, *Theorie der Sternschnuppen*, (que je n'avais pas sous les yeux en 1878) je vois que M. Faye à Paris a eu la même idée.

courtes périodes comparé à celui des autres, soit trop petit pour pouvoir produire aucune prépondérance considérable autour de l'écliptique. Tandis qu'on connaît deux à trois cents comètes à orbites à peu près paraboliques, on n'a pas jusqu'à ce jour trouvé plus de 10 à périodes au-dessous de 15 ans, parmi lesquelles il y a 9, dont les périodes n'excèdent pas 8 ans\*).

Néanmoins il en est ainsi. Si les orbites cométaires sont distribuées également dans l'espace, un observateur imaginé sur le soleil verrait dans le cours du temps les comètes distribuées également sur le ciel. Or on peut facilement, comme Schiaparelli l'a déjà indiqué, calculer la fréquence relative des inclinaisons des orbites en ce cas. La sphère céleste étant également occupée des pôles des orbites, le nombre d'inclinaisons entre deux limites  $i$  et  $i'$  sera proportionnel à la surface de la zone renfermant les pôles, conséquemment à la hauteur de la zone ou à  $\cos i - \cos i'$ . Maintenant on peut comparer cela à l'actualité, comme par l'exemple suivant.

Dès 1850 jusqu'à la fin de 1877 on a observé 75 comètes, qui n'ont paru qu'une fois et 1 (Tuttle) qui a paru deux fois; les 9 à courte période ont passé leurs périhélies 47 fois, ce qu'on sait avec certitude, quoiqu'elles n'aient pu être observées toutes les fois de la terre. Il y a donc eu, pendant ces 28 ans, 124 apparitions de comètes qu'on connaît. Si l'on en examine les inclinaisons, en traitant séparément les 77 et les 47, qui font un groupe particulier, on obtient le résultat présenté dans le tableau ci-dessous, où la colonne I contient les

---

\* ) Savoir: les comètes Encke, Tempel II, De Vico, Brorsen, Winnecke, Tempel I, D'Arrest, Biela, Faye. Depuis on a découvert deux nouvelles de ce groupe, Tempel III (= 1869 III) et Denning. Quoique la périodicité de la première soit vérifiée par observation, et quoiqu'il fût favorable à ce que je veux prouver, de la comprendre dans le calcul suivant, je ne l'ai pas fait, parce que l'accomplissement de la condition que j'ai faite, la vérification du calcul de la période par observation, est douteux pour la comète De Vico. La comète Denning a paru pour la première fois en 1881.

inclinaisons, reparties en zones de  $10^\circ$ , la colonne II les nombres relatifs des inclinaisons dans chaque zone pour des orbites distribuées également, donc les différences des deux cosinus des limites de la zone; la colonne III donne l'application de ces nombres aux 77 orbites, donc la distribution que les inclinaisons de celles-ci auraient eu, si les orbites eussent été distribuées également dans l'espace; enfin la colonne IV contient le nombre actuel d'inclinaisons dans chaque zone pour les 77, et la colonne V le même pour les 47 comètes; pour les dernières (ainsi comme pour la comète Tuttle) on doit évidemment compter chaque apparition comme une orbite singulière, puisqu'il est indifférent pour la question dont il s'agit, si la même comète revient p. e. 5 fois, ou si 5 comètes différentes, avec la même inclinaison des orbites, paraissent pendant le même temps.

I	II	III	IV	V	VI
$0^\circ-10^\circ$	0.015	1.16	3	11	10.5
10—20	0.045	3.46	5	31	10.0
20—30	0.074	5.7	5	5	1.9
30—40	0.100	7.7	7	0	1.0
40—50	0.123	9.5	11	0	1.0
50—60	0.143	11.0	10	0	1.0
60—70	0.158	12.2	11	0	1.0
70—80	0.168	12.9	10	0	1.0
80—90	0.174	13.4	15	0	1.0
	1.000	77.0	77	47	

En premier lieu on voit beaucoup d'accord entre les colonnes III et IV, d'où il sensuit que les 77 orbites ne sont pas loin d'être distribuées également dans l'espace, et que les 77 comètes paraîtraient donc à peu près distribuées également sur le ciel pour un observateur placé sur le soleil. II



y a une certaine prépondérance des petites inclinaisons, ce qu'on ne doit pas cependant prendre en faveur d'une plus grande fréquence de comètes autour de l'écliptique; car cette prépondérance est sans doute en grande partie produite par le passage inobservé de quelques comètes, qui aura lieu par préférence pour celles dont les orbites s'inclinent beaucoup sur l'écliptique\*).

Mais en second lieu la colonne V fait voir que les comètes aux courtes périodes causent une prépondérance considérable autour de l'écliptique. Si l'on prend la distribution qu'auraient eue les 77 comètes, si les orbites avaient été distribuées également dans l'espace, comme l'unité de densité sur la sphère céleste, on trouve la densité actuelle dans les zones diverses en divisant les chiffres de la colonne V par les chiffres de la colonne III et puis y additionnant l'unité [ou, ce qui revient au même, en divisant la somme des colonnes III et V par les nombres relatifs de la colonne II, et puis en réduisant à l'unité choisie]. De cette manière on obtient la colonne VI, qui prouve qu'un observateur se trouvant sur le soleil, justement à cause de ces courtes périodes, aurait vu pendant ces 28 ans 10 à 11 fois de plus de comètes dans une zone de  $40^\circ$  de largeur autour de l'écliptique que sur le reste du ciel. Si l'on avait employé la distribution actuelle des 77 inclinaisons [c'est-à-dire si l'on avait divisé la somme des colonnes IV et V par les nombres relatifs de II, au lieu de la somme des colonnes III et V], on aurait trouvé une prépondérance encore plus grande autour de l'écliptique, mais par la raison mentionnée ci-dessus il est probable que la distribution égale théorique soit plus rapprochée de la vérité. De l'autre côté

\*) On peut aisément s'assurer de la probabilité de ceci par une comparaison de la fréquence moyenne des comètes avec l'inclinaison moyenne de leurs orbites, laquelle pour des orbites distribuées également serait égale à  $57^\circ.3$  (l'arc dont la longueur est égale au rayon), mais qui est, pour un nombre assez grand, presque toujours moindre, et cela d'autant que la fréquence a été petite.

il est probable qu'il y ait aussi des comètes à courtes périodes encore inobservées; cependant on ne peut pas être sûr que cela compenserait la non-découverte des autres. En tous cas les chiffres de la colonne VI pour les petites inclinaisons sont plutôt trop petits que trop grands.

C'est cela qui a été l'objet des remarques de M. Gro-neman.

J'ajouterai que si l'on avait compris la comète Tempel III dans le calcul, le chiffre de la colonne VI pour la zone  $0^{\circ}$ — $10^{\circ}$  aurait été augmenté de 10.5 à 13.8.

Le procédé employé ci-dessus de compter les apparitions des comètes simplement d'après leurs passages aux périhélies, est fondé sur la supposition, que la durée moyenne de la visibilité pour un observateur placé sur le soleil — c'est-à-dire la durée moyenne de leur présence en dedans d'une distance donnée — ne soit pas très-différente pour les comètes distribuées également et pour les comètes périodiques. Cette supposition est justifiée par le fait, que toutes comètes qu'on peut découvrir de la terre, ont leurs distances périhélies entre des limites assez étroites; en effet pour les comètes examinées dans l'exemple, ces distances sont renfermées entre les limites 0 et 2.2 (le rayon de l'orbite terrestre étant pris pour unité). La moyenne des distances périhélies pour les 77 comètes distribuées également est de 0.875, et la moyenne pour les 47 comètes périodiques est de 1.020, ce qui est en défaveur d'une plus grande fréquence autour de l'écliptique. Mais de l'autre côté les vitesses paraboliques ou presque paraboliques des premières leur font parcourir la distance donnée en un temps plus court que les dernières, qui se meuvent avec des vitesses elliptiques. Sans effectuer le calcul rigoureux pour chacune des comètes on pourra aisément examiner, avec une approximation suffisante, s'il y aura là une compensation ou non, en calculant le temps de visibilité, en dedans d'une distance donnée  $r$ , d'une comète à orbite parabolique et avec la distance

périhélie égale à 0.875, et puis en effectuant le même calcul pour une comète, dont la distance périhélie est égale à 1.020 et la distance aphélie est égale à 5.367 (la moyenne pour les comètes périodiques, comptées d'après les apparitions). En donnant à  $r$  les valeurs de 2 et de 3 on trouve la durée de la visibilité:

	$r = 2$	$r = 3$
pour la parabole	= 0.60 années,	1.04 années
pour l'ellipse	= 0.75 — ,	1.48 — ,

d'où l'on voit que la différence des vitesses fait plus que compenser la différence des distances périhélies, ou que la supposition faite ci-dessus est plus que justifiée..

J'indiquerai encore une circonstance importante pour l'application de ces résultats aux météorites; c'est que les comètes aux courtes périodes sont plus assujetties à la dispersion successive de la matière que les autres. Évidemment les forces perturbatrices des planètes et surtout celles de Jupiter, qui jadis ont produit ces courtes périodes et qui très-souvent modifient les orbites, doivent aussi chaque fois dissoudre une part de la matière le long de l'orbite. Or il y a deux causes qui peuvent produire une prépondérance relative plus grande des météorites autour de l'ecliptique que des comètes. En premier lieu, si l'on considère toutes les apparitions comme celles de nouvelles comètes, pour distinguer les conséquences de la situation des orbites de celles des dimensions, il y a une différence essentielle entre les deux groupes de comètes; car non seulement les comètes aux courtes périodes et aux petites inclinaisons ont leurs distances aphélie groupées autour de la distance de Jupiter; mais on trouve aussi que l'angle formé par la ligne des apsides et la ligne des noeuds est en général petit (sa valeur moyenne pour les neuf comètes est de  $26^\circ$ ) ce qui évidemment doit contribuer à augmenter l'influence de cette puissante planète. En second lieu la circonstance que c'est la même comète qui revient chaque fois dans la même

orbite, et qui s'expose chaque fois à la force dissolvante du soleil et souvent à celle de Jupiter, a l'effet que la comète se dissout graduellement au degré de devenir à la fin invisible pour nous comme comète; d'où il s'ensuit que la continuation de ce procès pendant les siècles passés doit avoir dissous un certain nombre de comètes, qui n'ont jamais été observées et qui ne paraîtront jamais comme comètes, mais dont la matière s'y trouve encore. A tous les deux points de vue la possibilité de dispersion de la matière est beaucoup plus grande pour les comètes aux courtes périodes que pour les autres.

Au lieu de fonder la recherche sur les orbites des comètes on pourrait employer les orbites connues des étoiles filantes, p. e. les matériaux assez riches qu'on trouve dans la table de Schiaparelli, calculée d'après les observations de Zezioli; on trouve en effet ici une prépondérance relative très-distiguée des petites inclinaisons. Mais outre que les étoiles filantes ne font qu'une part presque évanouissante du total des météorites cosmiques, à cause de la condition de visibilité qu'un des noeuds de l'orbite doive se trouver dans la traînée mince de la terre dans l'espace — ou, proprement dit, dans la partie de cette traînée, que les quelques observateurs de l'hémisphère boréale ont pu embrasser de la vue — il y a encore le défaut que l'observation de la radiation seule n'est suffisant que pour le calcul d'une orbite parabolique, tandis qu'il y a sans doute parmi les orbites de Schiaparelli plusieurs moins excentriques. On n'est donc pas en état de pouvoir décider si la prépondérance est réelle ou si elle doit être attribuée à l'insuffisance des observations, tandis que pour les comètes à orbites très-excentriques on a dans l'approximation à concordance entre les nombres observés et les nombres théoriques pour des orbites distribuées également (voir les colonnes III et IV du tableau ci-dessus) un indice de ce que les comètes observées pendant les dernières dizaines d'années font une part considérable des



comètes observables du même temps, c'est-à-dire des comètes qui ont traversé notre part de l'espace.

Pour la recherche de l'apparence d'un tel amas de matière vu de la terre, je dois renvoyer à l'article de 1878, ou à un résumé dans le »Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques« de Darboux et Hoüel pour 1879. Seulement je remarquerai ici que le calcul de la densité relative de la matière dans l'espace, en distances diverses au soleil, est fondé sur l'hypothèse que toutes les distances périhélies ont la même fréquence entre les limites considérées.

J'ajouterai ici quelques mots à l'égard de cette hypothèse. Pour des orbites distribuées également dans l'espace on ne peut pas attendre une autre loi. Le principe de distribution égale n'exige pas que les périhélies et les aphélies soient distribuées également comme des points matériels dans l'espace, c'est-à-dire que leur fréquence soit proportionnelle au cube de la distance au soleil. Quand il y a une distribution égale des pôles des orbites sur la sphère et des longitudes des périhélies sur le cercle, elle est complète pour les directions, et alors un observateur placé sur le soleil verrait dans le cours du temps les comètes distribuées également sur le ciel, quand même toutes les distances périhélies auraient été égales. Si l'on veut appliquer le même principe, c'est-à-dire le principe des chances, aux dimensions des orbites, on doit conclure que toutes les dimensions sont également possibles.

Or pour les comètes à courte période, on ne peut pas appliquer le principe des chances aux distances aphélies, parce que l'expérience a montré qu'il y en a une condensation très-marquée autour de la distance de Jupiter (condensation qui doit nécessairement être réelle, puisqu'elle ne peut pas être une conséquence de la place de la terre dans l'espace, comme la condensation des périhélies des comètes observées autour de la distance 1). Il est possible qu'il y ait là aussi une condensa-

tion de périhélies; mais cela ne concerne que des comètes que nous ne pouvons jamais voir de la terre.

Évidemment, si l'on ne prend pas en considération l'origine de cette condensation des aphélies autour de la distance 5, son existence ne peut pas empêcher d'appliquer le principe des chances aux périhélies pour des distances plus petites, et c'est là ce que j'ai fait en 1878. On peut cependant entrer un peu plus profondément dans la matière. Quoi qu'il en soit à l'égard des orbites originaires des comètes periodiques et des perturbations qui ont produit et peu à peu modifié les petites ellipses, on peut s'imaginer que les orbites actuelles ont été engendrées par des forces tangentielles externes, qui ont agi, simultanément à l'attraction du soleil, en un point quelconque, p. e. dans les aphélies, dont la distance est à peu près commune pour ces comètes et par conséquent aussi pour les météorites du même origine. Or si l'on veut appliquer le principe des chances à ces forces, représentées par les vitesses aphélies, entre zéro, qui donne la ligne droite, et la vitesse donnant l'orbite circulaire, on trouve une distribution des périhélies qui n'est pas égale, mais qui est un peu plus condensée pour les distances moindres. En appliquant puis cette loi de la distribution des périhélies au calcul de la densité relative des météorites, on la trouve à peu près inversement proportionnelle à la distance au soleil, tandis que la supposition de la distribution égale des périhélies donne la condensation des météorites à peu près inversement proportionnelle à la racine carrée de la distance; en tous les deux cas la loi a lieu au moins jusqu'à la distance 4, ce qui est plus que suffisant pour les météorites qui peuvent être visibles comme lumière zodiacale. Le calcul prouvant cela se trouve dans une note à la fin de ce mémoire; cependant on peut aussi comprendre sans aucun calcul, qu'une circonstance tendant à augmenter la densité relative des météorites pour les petites distances, ne peut pas changer le caractère du phénomène.

## VIII.

Ce qui fait la difficulté d'une théorie cosmique de la lumière zodiacale, ce n'est ni les deux cônes, ni la continuation sur toute l'écliptique, mais c'est la *lumière d'opposition*. Il semble que le nom de *Gegenschein*, donné à ce phénomène par le découvreur, Brorsen, et passé depuis en d'autres langues, ait donné lieu à quelque confusion; car on trouve le même nom employé pour le phénomène de l'apparition du cône oriental simultanément à celle du cône occidental, p. e. dans cette observation de Jones, citée par Schmidt (*Das Zodiacalliecht* p. 20) à propos du *Gegenschein*: «I then had the extraordinary spectacle of the Zodiacal Light, simultaneously at both east and west horizons, from 11 to 1 o'clock, for several nights in succession».

Il est donc nécessaire d'en préciser la définition par le lieu du zodiaque, opposé à celui du soleil, et encore d'ajouter ceci: Ce qui caractérise cette lumière et qui constitue la difficulté pour la théorie, ce n'est pas qu'il y a de la lumière à l'élongation de  $180^\circ$ , mais qu'il y a là un *maximum* secondaire de lumière. Il semble que ce maximum ne soit pas fort prononcé; car tous les observateurs, qui l'ont vu, sont d'accord de l'extrême faiblesse du phénomène.

Or la lumière réfléchie par un amas de météorites à courtes périodes aurait un *minimum* de lumière au point de l'opposition au soleil. Cependant comme les mots »maximum« et »minimum« peuvent quelquefois donner des impressions inexactes, si l'on n'en tient pas la valeur relative en vue, je reproduirai ici, d'après le mémoire de 1878, le tableau donnant l'éclat théorique du ciel le long de l'écliptique, fondé sur la supposition mentionnée ci-dessus pour la distribution des périhélies et encore sur la supposition que l'éclat de chaque corpuscule puisse être calculé d'après la formule de Lambert,

c'est-à-dire que les corpuscules puissent en moyenne être considérés comme sphériques\*).

Élong.	Écl.	Élong.	Écl.
1°	689.4	80°	1.32
5	61.6	90	1.22
10	21.8	100	1.16
15	11.9	110	1.09
20	7.7	120	1.05
25	5.6	130	1.03
30	4.3	140	1.02
40	2.9	150	1.01
50	2.2	160	1.00
60	1.8	170	1.00
70	1.5	180	1.00

On voit que le minimum d'éclat à l'élongation de 180°, qui a été choisi comme unité, est si peu prononcé que l'éclat d'une bande de 30° à 40° de longueur de part et d'autre du point d'opposition peut être considéré comme constant.

Dans le mémoire de 1878 j'ai indiqué la possibilité d'une origine cosmique de la lumière d'opposition, dans certaines conditions; cependant je n'attribue pas beaucoup de poids à cette explication, et les observations que je connais, ne sont pas suffisantes pour pouvoir décider, si ces conditions (que le

\*) Il est peut-être superflu de dire, qu'une telle table, fondée sur des résultats *moyens*, ne peut point prétendre d'être conforme à la nature en chaque cas particulier, et spécialement que l'intensité de la lumière en une élongation donnée ne pourrait pas varier de temps à autre. — M. Gro-neman semble trouver une difficulté dans la forme cônica du phénomène; mais évidemment une bande lumineuse dont l'éclat décroît du milieu en deux sens perpendiculaires l'un à l'autre, mais plus lentement dans l'un que dans l'autre, et qui d'après la nature des choses ne peut pas avoir des contours brusques, doit nécessairement prendre une telle forme jusqu'aux élongations où l'éclat le long de l'écliptique devient à peu près constant.



phénomène ne soit visible que pendant certains temps de l'année) sont remplies ou non; pour cela on aurait besoin d'observations de l'hémisphère australe. Les observations de M. Lewis font entrevoir une autre explication bien simple; mais il faut attendre la publication du détail des observations. En général, la difficulté de l'explication est beaucoup agrandie par l'insuffisance et (ce qui est pis) par le désaccord des observations. Schiaparelli, qui a vu le phénomène assez souvent à Milan, mentionne quelques résultats dans la »Theorie der Sternschnuppen« p. 192; mais les plus remarquables de ses résultats ne me sont connus que par quelques citations de Serpieri. Tandis que Lewis dit que le *Gegenschein* est le mieux placé pour l'observation environ minuit, donc au méridien, et Schmidt que ces observations exigent un ciel très-pur (Astr. Nachr. 72), Schiaparelli a trouvé que »quand cette lumière passe le méridien, elle est beaucoup moins visible que quand elle ne se trouve qu'à 30° de l'horizon; et quand l'air est le plus pur et le plus tranquille elle est moins visible que quand il y a dans l'air un je ne sais quoi de brumeux« (Spettr. Ital. 1876 p. 134).

En 1878 j'ai porté l'attention à la circonstance remarquable, que Jones ne mentionne pas ce maximum, quoiqu'il ait vu plusieurs fois la lumière zodiacale sur toute l'écliptique (en 1856 à Quito, après le voyage de mer). Maintenant M. Grönerman donne l'information que cela est inexact, parce que Jones en parle amplement pp. XIII, XXIX et 81 de ses »Observations«. La correction est donc bien fondée pour le mot »mentionner«; mais elle me paraît peu importante; car, que Jones n'a pas vu la lumière d'opposition telle qu'elle est définie ci-dessus, je crois le pouvoir conclure de ces paroles de Serpieri (p. 133):

»Je le crois nécessaire de prendre en considération aussi «d'autres faits, qui, bien qu'ils ne résultent pas directement des «observations de Jones, sont pourtant tels qu'il faut en tenir «compte — —. C'est pourquoi je parlerai maintenant du plus

«curieux et plus signifiant de ces faits, savoir le phénomène lumineux que l'astronome Brorsen découvrit en 1855 et nomma «Gegenschein, ou lumière en opposition au Soleil; lequel Jones ne reconnut pas bien pendant son voyage et qu'il confondit peut-être avec la diffusion faible et très-élevée, qu'il appela «Lumière pâle.»

La mention que fait Jones de ce maximum, doit donc se trouver dans la partie théorique de son livre et probablement avoir égard aux observations de Brorsen, qui avait fait sa découverte au temps du voyage de Jones, en 1853 ou 1854 (Astr. Nachr. t. 42 p. 219). Quoique je ne puisse m'énoncer que d'une manière indécise sur ce point, je n'ai pas cru nécessaire de faire des efforts pour me procurer le livre de Jones, parce qu'il ne s'agit pas de ce qu'il a dit, mais de ce qu'il a vu.

A ces résultats des observations j'ajouterai encore ceci, que Schmidt a vu quelquefois des maxima secondaires de la lumière dans l'écliptique, mais en dehors du point d'opposition (Astr. Nachr. t. 72 p. 342).

Les théories terrestres de MM. Serpieri et Groneman, quoique bien différentes, ont en commun de recourir à des forces inconnues comme *cause de la lumière zodiacale*. Je crois qu'il sera possible de trouver une force connue comme *cause des théories terrestres* — outre la recherche générale de la vérité, le principe de toutes ces investigations — savoir la force d'autorité de quelques passages de l'ouvrage fondamental de Schiaparelli, *Theorie der Sternschnuppen*. L'auteur y a fait une digression pour examiner la possibilité d'une origine cosmique de la lumière zodiacale; mais il a été arrêté par la difficulté de la lumière d'opposition. En examinant l'intensité de la lumière réfléchie par un amas annulaire infiniment mince, entourant le soleil et la terre et ayant le centre au soleil, il trouve des maxima de lumière aux quadratures et des minima aux points de conjonction et d'opposition au soleil. Il s'entend que le raisonnement de l'auteur est correct et bien fondé; seulement

à cause d'une certaine concision de l'expression, l'application suivante à une suite de tels anneaux semble avoir été sujette au malentendu, que le résultat pour les quadratures et le point de conjonction subsiste encore en ce cas. (Voir *Serp.* p. 136).

M. Schiaparelli a surmonté beaucoup de difficultés dans la théorie des étoiles filantes, mais non sans matériaux suffisants d'observations; et j'ose dire que quand nous aurons de l'équateur et de l'hémisphère australe des séries d'observations de la lumière d'opposition, faites avec le même soin et dans des conditions aussi favorables que quelques unes des séries de l'hémisphère boréale, alors nous aurons aussi l'explication de ce phénomène.

---

## Supplément

sur le calcul de la densité des météorites dans l'espace et de l'éclat de leur lumière réfléchie.

D'un grand nombre ( $n$ ) de météorites, dont les distances périhélies  $q_1 q_2 \dots q_n$  sont distribuées d'une manière quelconque entre  $o$  et  $r$ , chacun ce trouvera entre deux surfaces sphériques avec les rayons  $r$  et  $r + \Delta r$  et avec le centre commun au Soleil, pendant une certaine fraction  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$  du temps de révolution ( $T_1 T_2 \dots T_n$ ), donc pendant  $\alpha_1 T_1, \alpha_2 T_2, \dots \alpha_n T_n$  années pour chaque révolution et pendant  $\alpha_1 P, \alpha_2 P, \dots \alpha_n P$  années pour une période donnée de  $P$  ans, puisque chaque valeur de  $T$  est contenue  $\frac{P}{T}$  fois en  $P$ . D'une telle période de  $P$  ans on trouvera donc un météorite entre les deux sphères pendant  $P (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$  années, ou en moyenne on pourra attendre de trouver à un moment donné  $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$  météorites entre les deux sphères; en divisant ce nombre par la différence des volumes des deux sphères on trouvera la densité.

On trouve  $\alpha$  en divisant le double de l'aire du secteur elliptique entre les rayons vecteurs  $r$  et  $r + \Delta r$  par l'aire de toute l'ellipse. Si  $v$  est l'anomalie vraie, et  $\Delta v$  l'angle formé par les deux rayons vecteurs, on aura

$$\alpha = \frac{r^2 \Delta v}{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}},$$



$a$  étant le grand demi-axe et  $e$  l'excentricité de l'ellipse. La différence des volumes des deux sphères étant  $F = 4 \pi r^2 \Delta r$ , on trouve

$$\frac{\alpha}{F} = \frac{1}{4 \pi^2 a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\Delta v}{\Delta r}.$$

Si  $\Delta r$  et  $\Delta v$  tendent vers zéro, on peut en trouver le rapport par différentiation de l'équation de l'ellipse

$$r = \frac{a (1-e^2)}{1+e \cos v},$$

ce qui donne

$$\frac{dv}{dr} = \frac{a(1-e^2)}{r^2 e \sin v},$$

d'où l'on trouve

$$\frac{\alpha}{F} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{4 \pi^2 a r^2 e \sin v}.$$

En exprimant  $v$  par  $r$ ,  $a$  et  $e$  par la distance aphélie et périhélie,  $Q$  et  $q$ , on aura

$$\frac{\alpha}{F} = \frac{1}{2 \pi^2 r (Q+q) \sqrt{(Q-r)(r-q)}}.$$

Si l'on suppose en premier lieu, que  $Q$  soit constant, ce qui a lieu avec grande approximation pour les comètes à courte période, on aura la densité cherchée

$$D = \frac{1}{2 \pi^2 r \sqrt{Q-r}} \cdot \sum \frac{1}{(Q+q) \sqrt{r-q}} = \sum f(q),$$

où la sommation embrassera toutes les orbites. Or, si les distances périhélie avaient été distribuées également, on aurait pu trouver la somme en multipliant  $\frac{1}{r} \int_0^r f(q) dq$ , qui serait alors la valeur moyenne de  $f(q)$ , par le nombre des météorites, ou par  $r$ , qui serait proportionnelle à ce nombre.

Mais si la distribution des périhélie dépend des forces tangentielles ayant agi en un moment dans les aphélie, simultanément à l'attraction du Soleil, on peut trouver  $q$

comme fonction de cette force, représentée par la vitesse dans l'aphélie ( $w$ ) comme variable absolue entre les limites zéro et la valeur qui donne le mouvement circulaire. Alors on aura, si  $f(q) = \varphi(w)$ , et si  $W$  est la valeur de  $w$ , correspondant à  $q = r$ ,

$$D = \sum \varphi(w) = C \int_0^W \varphi(w) dw,$$

parce que le nombre des météorites est alors proportionnel à  $W$ .

Or on a, si l'année est l'unité du temps et le rayon de l'orbite terrestre l'unité des distances,

$$w = 2\pi \sqrt{\frac{2}{Q} - \frac{1}{a}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{Q}} \sqrt{\frac{q}{Q+q}},$$

d'où l'on trouve

$$q = \frac{Q^2 w^2}{8\pi^2 - Qw^2}$$

et

$$f(q) = \varphi(w) = \frac{8\pi^2 - Qw^2}{16\pi^4 r Q \sqrt{Q-r}} \sqrt{\frac{8\pi^2 - Qw^2}{8\pi^2 r - Q(Q+r)w^2}}.$$

C'est donc cette expression qu'on aura à multiplier avec  $dw$  et à intégrer entre

$$0 \text{ et } W = 2\pi \sqrt{\frac{2r}{Q(Q+r)}} = 2\pi k \sqrt{\frac{2}{Q}},$$

si l'on pose

$$\frac{r}{Q+r} = k^2 \dots \dots (1).$$

Pour faciliter l'intégration on posera ensuite

$$\frac{w}{2\pi k} \sqrt{\frac{Q}{2}} = x, \quad dw = 2\pi k \sqrt{\frac{2}{Q}} \cdot dx,$$

d'où l'on trouve

$$\varphi(w) = \frac{1 - k^2 x^2}{2\pi^2 r Q \sqrt{r(Q-r)}} \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}}$$

et

$$D = \frac{C}{r Q \sqrt{Q(Q^2 - r^2)}} \int_0^1 \frac{(1 - k^2 x^2)^2}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2}} dx \dots (2)$$

parce que  $w = W$  donne  $x = 1$ . La densité sera donc déterminée par une intégrale elliptique complète de deuxième espèce, dont le module  $k$  est donné par l'équation (1). En employant les notations ordinaires on aura

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1 - k^2 x^2)^2}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2}} dx &= \int_0^K \Delta^4 \operatorname{am} u. du = \\ \frac{2}{3} (1 + k'^2) \int_0^K \Delta^2 \operatorname{am} u. du - \frac{k'^2}{3} K &= \\ (1 - \frac{k^2}{3}) K - \frac{2}{3} k^2 (1 + k'^2) \int_0^K \sin^2 \operatorname{am} u. du. \end{aligned}$$

La forme la plus commode pour le calcul de cette intégrale sera

$$k^2 \int_0^K \sin^2 \operatorname{am} u. du = \frac{\pi^2}{K} \sqrt{\frac{2\pi}{k'K}} \left\{ q - 4q^4 + 9q^9 - \dots \right\},$$

où il ne sera pas nécessaire de changer la notation ordinaire du nom  $q$ , parce qu'il ne peut pas être confondu avec la distance périhélie qui a été désignée ci-dessus par la même lettre.

En substituant cette valeur dans l'équation (2) on trouvera

$$\begin{aligned} D &= \frac{C}{r Q \sqrt{Q(Q^2 - r^2)}} \left\{ (1 - \frac{k^2}{3}) K \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\pi^2}{3K} (1 + k'^2) \sqrt{\frac{2\pi}{k'K}} [q - 4q^4 + \dots] \right\} \dots \dots (3) \end{aligned}$$

Pour le calcul numérique j'ai posé  $Q = 5.8$  comme dans le calcul correspondant de l'article de 1878; la dixième n'est pas d'importance, parce que la moyenne des distances aphéliques des comètes périodiques change avec le temps à cause des modifications successives des orbites, ce qui est naturellement aussi le cas pour les météorites. Outre l'expression de

la densité pour une valeur constante de  $Q$ , j'ai cherché en 1878 la densité aussi pour des distances aphélies distribuées également d'une certaine valeur  $Q_0$  à l'infini. Mais comme ces deux suppositions, qu'on peut considérer comme deux cas extrêmes, donnent des résultats presque identiques pour les valeurs de  $r$  jusqu'à 3 ou 4, je me dispenserai ici du calcul analogue.

En choisissant pour la constante  $C$  la valeur qui donne l'unité de densité en la distance de la Terre, on trouve

$$D = \frac{A}{r \sqrt{Q^2 - r^2}} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{3}\right) K - \frac{B(1 + k'^2)}{K \sqrt{K} k'} [q - 4q^4 + \dots] \right\}$$

où  $\log A = 0.61000$  et  $\log B = 1.21730$ .

En effectuant le calcul on trouve que la densité des météorites est à peu près inversement proportionnelle à la distance au Soleil, comme on peut voir du tableau suivant, où l'on trouve pour quelques valeurs de  $r$  les valeurs correspondantes de  $D$  et, pour comparaison, les valeurs de  $\frac{1}{r}$ . L'irrégularité des intervalles des distances est causée par l'emploi d'une table des fonctions elliptiques, qui a l'angle du module pour argument et qui n'est pas commode pour l'interpolation.

$r$	$D$	$\frac{1}{r}$	$r$	$D$	$\frac{1}{r}$
0.01593	69.1	62.8	1.000	1.00	1.00
0.02836	38.8	35.3	1.506	0.65	0.66
0.04440	24.7	22.5	1.933	0.50	0.52
0.1803	5.98	5.55	2.446	0.39	0.41
0.4164	2.47	2.40	3.061	0.32	0.33
0.7682	1.32	1.30	3.803	0.28	0.26

Pour le calcul suivant de l'apparence d'un tel amas de matière, vu de la Terre, on peut donc sans hésitation em-



ployer la loi approximative que la densité est inversement proportionnelle à la distance au Soleil.

Si l'on considère un cône ou une pyramide ayant le sommet dans l'oeil de l'observateur et couvrant de sa base une petite part du ciel p. e. une minute carrée, ou pourra trancher un élément de ce cône, en la distance  $\rho$  de l'oeil et avec l'épaisseur  $d\rho$ ; le nombre des météorites en dedans de cet élément étant proportionnel à  $D\rho^2 d\rho$ , l'éclat de l'élément sera, à un constant près,

$$dI = G \cdot D\rho^2 d\rho = G \cdot \frac{\rho^2}{r} d\rho,$$

$G$  étant l'éclat de chaque météorite.

En considérant la forme sphérique comme la moyenne pour un grand nombre de météorites, on peut déterminer  $G$  par la formule de Lambert, qui est fondée sur la supposition, que chaque élément de la sphère reçoit de la lumière en raison de sa grandeur apparente vue du Soleil, et qu'il émet de la lumière en raison de sa grandeur apparente vue de la Terre, savoir

$$G = \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{r^2 \rho^2},$$

où  $\alpha$  est l'angle extérieur au météorite du triangle entre ce point, le Soleil et la Terre, dont les côtés sont  $r$ ,  $\rho$  et l'unité, et dont l'angle à la Terre est l'élongation  $e$ .

On trouve donc

$$dI = \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{r^3} d\rho,$$

qu'on aura à intégrer de  $\rho = 0$  jusqu'à la valeur limite correspondant à la distance  $R$  au Soleil, en dedans de laquelle la loi approximative de la densité est valide.

En substituant

$$r = \frac{\sin e}{\sin \alpha}, \quad d\rho = \frac{\sin e}{\sin^2 \alpha} d\alpha,$$

on trouve

$$dI = \frac{C}{\sin^2 e} (\sin^2 \alpha - \frac{\alpha}{2} \sin 2\alpha) d\alpha,$$

où  $\alpha$  commence par la valeur  $e$  et finit par la valeur  $\alpha_0$ , peu différente de  $180^\circ$ , correspondant à  $r = R$ , et définie par l'équation

$$\sin \alpha_0 = \frac{\sin e}{R}.$$

Or on a

$$\int \sin^2 \alpha. d\alpha = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\alpha,$$

$$\frac{1}{2} \int \alpha. \sin 2\alpha. d\alpha = -\frac{1}{4} \alpha \cos 2\alpha + \frac{1}{8} \sin 2\alpha,$$

donc

$$\int (\sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \alpha \sin 2\alpha) d\alpha = \frac{3}{4} \alpha - \frac{1}{2} \alpha \sin^2 \alpha - \frac{3}{8} \sin 2\alpha,$$

et en substituant les limites et réduisant,

$$I = \frac{C}{2} \left\{ e - \frac{\alpha_0}{R^2} + \frac{3}{2} \cotg e - \frac{3 \cos \alpha_0}{2 R \sin e} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha_0 - e}{\sin^2 e} \right\} \dots (4).$$

D'après ce qui précède on peut poser  $R = 4$  et  $\sin \alpha_0 = \frac{1}{4} \sin e$ ; mais le résultat n'est que peu modifié, si l'on pose  $R = \infty$  et  $\alpha_0 = 180^\circ$ ; on aura en ce cas:

$$I = \frac{C}{2} \left\{ e + \frac{3}{2} \cotg e + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi - e}{\sin^2 e} \right\}.$$

Si l'on choisit l'éclat pour  $e = 180^\circ$  comme unité, on aura la constante  $C$  déterminée par l'équation

$$C \left( 1 - \frac{1}{R^2} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

Lorsque  $e$  s'approche de  $180^\circ$ , la formule (4) devient incommode pour le calcul, parce que les trois termes derniers, quoique séparément très-grands, tendent vers zéro. En développant suivant les puissances de  $\sin e$ , on trouvera en ce cas, si l'on pose  $\frac{1}{R} = \delta$ ,

$$I = 1 + C \left\{ (1 - \delta^5) \frac{\sin^3 e}{3.5} + \frac{3}{2} (1 - \delta^7) \frac{\sin^5 e}{5.7} \right. \\ \left. + \frac{3.5}{2.4} (1 - \delta^9) \frac{\sin^7 e}{7.9} + \dots \right\}$$

ou, si l'on pose  $R = 4$ ,

$$I = 1 + 0.045 \sin^3 e + 0.029 \sin^5 e + 0.020 \sin^7 e + \dots$$

d'où l'on voit que l'éclat ne varie que très-peu pour de grandes elongations.

Si l'on veut employer un développement pareil pour les petites elongations, on trouve (pour  $R = 4$ )

$$I = \frac{8}{5 \sin^2 e} - \frac{1}{15} - 0.045 \sin^3 e - 0.029 \sin^5 e - \dots$$

L'éclat du zodiaque, calculé de cette manière, ne diffère naturellement de l'éclat calculé avec la supposition d'une distribution égale des périhélies (dont le résultat est présenté dans le tableau du chapitre VIII) qu'en ce que les chiffres pour les petites elongations sont plus grands au premier cas qu'au second.

Christiania, Décembre 1881.

---

## Til Landets Realister og Reallærere.

I Overensstemmelse med den af Reallærermødet paa Hamar fattede Beslutning om at søge afholdt et lignende Møde iaar her i Kristiania, har en Forsamling herboende Realister overdraget undertegnede som Komité at gjøre de fornødne Skridt i Sagens Anledning. Som den heldigste Tid for Mødets Afholdelse er man bleven enig om foreløbig at sætte FERIERNES Slutning. Komitéen tillader sig forslagsvis at nævne Dagene fra Mandag den 14de til Onsdag den 16de August.

Da et saadant Mødes Afholdelse formentlig bør betinges af en tilstrækkelig talrig Deltagelse, tillader vi os herved at opfordre Realister, Reallærere og andre for Sagen interesserede til snarest mulig, helst inden 20de April, at melde Komitéen, hvorvidt de tænke at deltage. Samtidig ønskes oplyst, om den ovenfor foreslaaede Mødetid falder beleilig.

Komitéen agter ved Henvendelse til Dampskibsselskabernes og Jernbanernes Bestyrelser at søge opnaaet den ved saadanne Leiligheder almindelige Nedsættelse i Passagerfragten.

Forslag til Forhandlingsgjenstande i Forbindelse med Meddelelser om indledende Foredrag kan indsendes indtil Udgangen af Mai Maaned.



Breve vedrørende Mødet bedes adresserede til medunder-  
tegnede »Stipendiat Holst, Pilestræde 49«.

Kristiania den 3die Marts 1882.

Olaf Berg,	Eiling Holst,	Sophus Lie,
Stud. real.	Univ.-Stipendiat.	Professor.
A. Nærup,	H. L. Sørensen,	
Inspektør ved Gjertsens Skole.	Konrektor.	

---

# Ein Beitrag zur methodischen Behandlung der metrischen Eigenschaften algebraischer Kurven.

VON

ELLING HOLST.

---

In einer Sitzung der mathematischen Gesellschaft zu Paris, Decbr. 1879 theilte ich eine Methode mit, geometrische Eigenschaften zu studiren, namentlich Grössen-Ausdrücke explicite zu erhalten, indem man nur die Bedingungen untersucht, für welche der gesuchte Ausdruck verschwindet oder unendlich wird. Die Methode besteht eigentlich nur in der Anwendung des evidenten Princip: *Ein Product von einer endlichen Anzahl Factoren verschwindet (oder wird unendlich) dann und nur dann, wenn einer ihrer Factoren verschwindet (oder unendlich wird), in Verbindung mit der bekannten Thatsache, dass eine Funktion, die nicht verschwindet (oder unendlich wird) constant ist.*

Als ein Supplement hierzu werde ich im Folgenden eine hiemit analoge Methode in einem Beispiele ausgeführt zeigen, für welche das Princip darin besteht: *Eine Summe von einer endlichen Anzahl endlicher Addenden ist endlich.* Absichtlich befolge ich genau dasselbe Raisonement, welches mir den zubeweisenden Satz gegeben hat.

Der bekannte Satz über Kurven 3. O., dass eine Gerade zwischen zwei Inflexionspunkten auch einen dritten enthält, zeigt, dass eine metrische Beziehung bestehen muss zwischen den Krümmungsradien,  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , in den Schnittpunkten einer solchen Kurve mit einer Geraden. Wenn zwei der Radien unendlich gross werden, muss es auch der dritte sein. Allgemeiner: wenn einer der Radien unendlich gross wird, müssen bekanntlich die beiden andern demselben Kegelschnitte angehören, welcher die Kurve 3. O. in den beiden Schnittpunkten osculirt. Somit wird man auf eine analoge Eigenschaft für Kegelschnitte hingewiesen.

Nun ist es aber eine bekannte und oftmals wiederholte Eigenschaft der Kegelschnitte, dass *zwei Krümmungsradien sich verhalten wie die Kuben der Tangenten in den beiden Punkten bis zum Schnittpunkte gerechnet*. Um diesen Satz in zweckmässiger Form zu bringen führen wir das Verhältniss der beiden Sinusse derjenigen Winkel ein, welche die Tangenten mit der schneidenden Gerade bilden. Wenn man auf dem Kegelschnitte eine Fortschrittsrichtung festsetzt, schneidet der Kegelschnitt jede Secante unter zwei Winkeln welche mit entgegengesetzten Vorzeichen aufzufassen sind. Es seien diese Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  und die Krümmungsradien in den entsprechenden Schnittpunkten  $\rho_1$  und  $\rho_2$ , dann besteht also immer die Gleichung

$$\frac{1}{\rho_1 \sin^3 \varphi_1} + \frac{1}{\rho_2 \sin^3 \varphi_2} = 0.$$

Es ist nun leicht mit Hülfe unseres angegebenen Princips zu bestätigen, dass allgemein die analoge Formel

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i \sin^3 \varphi_i} = 0$$

für die Schnittpunkte jeder ebenen algebraischen Kurve  $n^{\text{ter}}$  O. mit einer Geraden gilt.

Wenn nämlich

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i \sin^3 \varphi_i}$$

unendlich werden soll, ist es nothwendig und hinreichend, dass ein Glied beispielweise

$$\frac{1}{\rho_1 \sin^3 \varphi_1}$$

unendlich wird; dies kann aber nur geschehen:

A) für  $\rho_1 = 0$

B) für  $\sin \varphi_1 = 0$ .

A)  $\rho_1 = 0$ .

Dies kommt abermals in zwei Fällen vor:

- 1) *Der Punkt ist eine Spitze.* Dieser Fall kann vorläufig ausgeschlossen und nachher betrachtet werden. Wir nehmen also bis auf später an, die Kurve sei ohne Spitzen.
- 2) *Der Punkt besitzt eine focale Tangente.* Legt man aber einen im Punkte osculirenden Kegelschnitt hinzu, schneidet dieser die Gerade in einem zweiten Punkte, wo allgemein sowohl der Krümmungsradius  $\rho'$  als der Schnittwinkel  $\varphi'$  endlich sind. Die Formel

$$\frac{1}{\rho_1 \sin^3 \varphi_1} + \frac{1}{\rho' \sin^3 \varphi'} = 0$$

zeigt aber, dass das Glied

$$\frac{1}{\rho_1 \sin^3 \varphi_1} = - \frac{1}{\rho' \sin^3 \varphi'}$$

in der That endlich ist, obschon  $\rho_1 = 0$ , d. h.  $\sin_1 \varphi = \infty$ , was auch damit stimmt, dass der Sinus des Winkels zweier Geraden unendlich wird, sobald die eine Gerade focal ist.

B)  $\sin \varphi_1 = 0$  sagt aus, dass

- 1) entweder der Punkt unendlich fern ist,
- 2) oder die Gerade berührt.

1) Wenn der Punkt unendlich fern ist, kann man wieder einen



osculirenden Kegelschnitt hinzufügen und dasselbe Raisonement führen wie in A 2). Das Glied  $\frac{1}{\rho_1 \sin^3 \varphi_1}$  bleibt endlich, indem  $\rho_1 = \infty$  den Faktor  $\sin^3 \varphi_1 = 0$  in Gleichgewicht hält.

- 2) Wenn die Gerade die Kurve berührt, werden im Allgemeinen zwei (ausnahmsweise mehrere) Punkte auftreten für welche die resp.  $\sin \varphi$  verschwinden. Man erhält

$$\frac{1}{\rho_1 \sin^3 \varphi_1} = \pm \infty$$

$$\frac{1}{\rho_2 \sin^3 \varphi_2} = \mp \infty.$$

Dass im Allgemeinen die Summe dieser beiden

$$\frac{1}{\rho_1 \sin^3 \varphi_1} + \frac{1}{\rho_2 \sin^3 \varphi_2}$$

endlich bleibt sieht man folgender Weise ein. Diese Summe muss entweder *identisch unendlich* oder im Allgemeinen endlich sein. Das erste kann nicht der Fall sein, weil es immer eine endliche Anzahl Punkte giebt, wo die Kurve einen Kegelschnitt 6-punktig berührt; in solchen Punkten aber *verschwindet* unsere Summe nach dem vorher gesagten.

Hiemit ist aber der Beweis für Kurven ohne Spitzen schon vollständig geführt. Dreht man nämlich die Gerade um einen *willkürlich* angenommenen festen Punkt, wird »im Allgemeinen« die Summe

$$\sum_1^n \frac{1}{\rho_i \sin^3 \varphi_i}$$

im Laufe der ganzen Umdrehung nicht unendlich. D. h.: es stehen von den  $\infty^2$  Geraden der Ebene nur noch *eine endliche Anzahl* zurück, welche nicht untersucht sind. Dass aber die Summe unendlich wird, ist eine *einfache* Bedingung, die entweder 1) *identisch* oder 2) für  $\infty^1$  Geraden erfüllt

werden muss oder 3) *gar nicht erfüllt werden kann*. Das letzte ist somit hier der Fall; die Summe muss constant sein.

Legt man nun die Gerade durch einen Inflexionspunkt, verschwindet ein Glied. Die übrigen gehören aber dann bekanntlich einer Kurve einer um 1 niedrigeren Ordnung. Durch diese Bemerkung ist die recurrirende Schlussweise anwendbar, und der Satz gilt allgemein, weil er für Kegelschnitte gilt.

Dass der Satz für Kurven mit Spitzen ebenso gilt, wie für allgemeine, folgt nun durch eine Grenzenbetrachtung einfachster Art.

---

Die in diesem Beispiele erläuterten Schlüsse sind in sehr einfachen Principien begründet. Die specielle Untersuchungen der singulären Fälle bieten nicht nur meistens an und für sich interessante sondern häufig ziemlich wichtige Probleme dar, deren Lösung durch rein geometrische Ueberlegungen immer sehr lehrreich sind.

Um die Fruchtbarkeit der Methode weiter darzulegen sei es gestattet an diejenige Art Theoreme zu erinnern, wo es sich um den Schwerpunkt eines ebenen oder räumlichen Punktsystems handelt. Wenn einer der Punkte in's unendliche rückt, bewegt sich der Schwerpunkt nach demselben unendlich fernen Punkte. Hiemit ist die Asymptotenrichtung des Ortes eines solchen Schwerpunktes bestimmt.

Beispiel: Die von Herrn *Weill* in Liouvilles Journal bewiesene Sätze über den Schwerpunkt der Berührungspunkte eines beweglichen Polygonstückes, welches einem Kreise um- und einem andern eingeschrieben ist: dass der Ort des Schwerpunktes ein Kreis ist, u. s. w.

Ebenso giebt die Methode sogleich den Satz, dass der Schwerpunkt derjenigen Punkte auf einer algebräischen Kurve, wo die Tangenten parallel sind, fest liegt. Rückt nähm-

lich einer der Berührungspunkte unendlich weit, rückt, was man leicht geometrisch beweist, ein anderer gleichzeitig in der entgegengesetzten Richtung, u. s. w.

Für Viele wird vielleicht die Methode darin seinen wesentlichen Vorzug haben, dass man das eigentliche Rechnen vermeidet und dagegen die reine geometrische Anschauung speciel in Bezug auf das Studium des unendlich kleinen oder grossen in den Vordergrund tritt.

2 Febr. 1882.

---

Skulde der ikke lade sig finde et reelt mathematisk Udtryk, der kunde overtage de imaginære Størrelses Rolle eller gjøre samme Tjeneste, som disse Størrelser?

AF

S. A. SEXE.

De imaginære Størrelser have i lange Tider været et Tvistens Æble. De have voldt Matematikens Dyrkere — Generation efter Generation — meget Hovedbrud og megen logisk Kvide, hvoraf Frugten udentvivl for de Flestes Vedkommende blev, at de hverken kunde forsone sig med disse Størrelser eller turde forkaste dem. Der spørges derfor: Skulde man ikke uden Skade for den matematiske Analyse kunne undgaa de imaginære Størrelser paa den Maade, at man fandt et eller andet reelt Udtryk, der kunde fungere som disse Størrelses algebraiske Stedfortræder? Jeg har tidligere forsøgt at paavise et saadant Udtryk. Det Følgende er et Forsøg i samme Retning.

### § 1.

Multiplicerer man  $+a$  med  $+a$  eller for Kortheds Skyld  $a$  med  $a$ , det Udkomne med  $a$  o. s. v. fremstaar Rækken

$$a^2, a^3, a^4, a^5 \dots a^n \quad (1)$$

Ved at multiplicere  $(-a)$  med  $(-a)$ , det Udkomne med  $(-a)$  o. s. v. faar man Rækken



$$a^2, -a^3, a^4, -a^5 \dots (-a)^n \quad (2)$$

Multipliserer man  $a$  med  $(-a)$ , det Udkomne med  $a$  o. s. v. med alternerende Fortegn, fremkommer Rækken

$$-a^2, -a^3, a^4, a^5, -a^6 \dots \pm a^n \quad (3)$$

Ved at multiplicere  $(-a)$  med  $a$ , det Udkomne med  $(-a)$  o. s. v. med alternerende Fortegn, udkommer Rækken

$$-a^2, a^3, a^4, -a^5, -a^6 \dots \mp a^n \quad (4)$$

Leddene i Rækken (1) ere Produkter af numerisk ligestore Faktorer med positivt Fortegn. Leddene i Rækken (2) ere Produkter af numerisk ligestore Faktorer med negativt Fortegn, hvorimod ethvert Led i Rækkerne (3) og (4) er et Produkt af numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn, medens Forskjellen mellem de positive og negative Faktoreres Antal er = 0 eller 1.

Udtrykket for det almindelige Led i Rækken (1) og (2) er  $(\pm a)^n$ . Man har intet Udtryk for det almindelige Led i Rækkerne (3) og (4). Men lad  $(+a -)^n$  gjælde for  $a_1 (-a)_2 a_3 (-a)_4 \dots (\pm a)_n$ , og lad  $(-a +)^n$  gjælde for  $(-a)_1 a_2 (-a)_3 \dots (\mp a)_n$ , saa har man i  $(\pm a \mp)^n$  et Udtryk for det almindelige led i disse Rækker. Tegnet  $\mp$ , som i Udtrykket  $(\pm a \mp)$  følger paa  $\pm a$ , antyder, at Fortegnet for den følgende Faktor er det modsatte af Fortegnet for den næstforegaaende Faktor, eller at Fortegnet vexler fra Faktor til Faktor. Saaledes bliver

$$\begin{aligned} (\pm a \mp)^1 &= \pm a \\ (\pm a \mp)^2 &= (\pm a) (\mp a) = -a^2 \\ (\pm a \mp)^3 &= (\pm a) (\mp a) \pm a = \mp a^3 \end{aligned} \quad (5)$$

o. s. v.

En Potents er et Produkt af ligestore Faktorer, følgelig ere Leddene i Rækkerne (1) og (2) Potentser. Det skulde nu se ud til at ogsaa Leddene i Rækkerne (3) og (4) maatte

have nogen Adkomst til dette Navn. Men da man har for Skik, ved ligestore Faktorer at forstaa identiske Faktorer  $\alpha$ : Faktorer med samme Talværdi og Fortegn, saa er den anførte Definition paa Potents for trang til at rumme Leddene i Rækkerne (3) og (4). En Definition, som skulde kunne omfatte hvert Led i allé disse Rækker, maatte lyde saaledes: En Potents er et Produkt af numerisk ligestore Faktorer. I Henhold til denne Definition vilde man kunne sige: 1) at Faktor,  $\alpha$ , i Leddene af Rækken (1) og (2) er en Rod med konstant Fortegn; 2) at ethvert Led i disse Rækker er en Potents af en Rod med konstant Fortegn; 3) at Faktor,  $\alpha$ , i Leddene af Rækkerne (3) og (4) er en Rod med alternativt Fortegn, eller en Alternationsrod; og 4) at ethvert Led i sidstnævnte Rækker er en Potents af en Rod med alternerende Fortegn, eller en Alternationspotents. Ifølge samme Definition kommer en Potentsexponent til at betegne Antallet af de numerisk ligestore Faktorer, hvis Produkt er = Potentsen, hvad enten disse Faktorer have samme Fortegn eller alternerende Fortegn.

Det har naturligvis sine Vanskeligheder, at blive fortrolig med en saadan Udvidelse af tilvante Begreber, eller egentligere: med en saadan Subsumtion af tilvante Begreber under videre Begreber, hvortil man ikke er vant, ligeledes med den deraf følgende Terminologi. Hvorvidt en saadan Subsumtion vil blive anseet nødvendig og en saadan Terminologi hensigtsmæssig, maa staa derhen. Men hvad der ikke bør staa derhen, er Erkjendelsen af at hverken den i Rækkerne (3) og (4) anvendte Operationsmaade eller de der ved fremkomne Led ere blotte Fantasifostre. Man ved, hvad man gjør, og forstaar, hvad man faar ud, naar man multiplicerer  $(\pm a)$  med  $(\mp a)$  o. s. v., hvorimod man, idet man multiplicerer  $\sqrt{-1}$  med  $\sqrt{-1}$  og faar ud  $(-1)$ , forholder sig som en Magus, der ikke begriber sine egne Kunststykker. De Operationsmaader, som udtrykkes ved  $(+ a)^n$ ,  $(- a)^n$ ,

$(+a -)^n$  og  $(-a +)^n$ , ere beslægtede Anvendelser in concreto af det abstrakte  $(a)^n$ . At en Potentsation af en Rod med alternerende Fortegn ikke blot lader sig tænke, men ogsaa anvende, fremgaar f. Ex. deraf, at man uvilkaarlig kommer til at gjøre Brug af samme, naar man søger et algebraisk Udtryk for Indholdet og Beliggenheden af hvert af de 4 kongruente Kvadrater, som lade sig konstruere omkring Koordinaternes Begyndelsespunkt i et retvinklet Koordinatsystem med to Axer. Er en Side i disse Kvadrater  $= a$ , saa finder det ene af disse Kvadrater sit Udtryk i  $a (-a)$ . et andet i  $(-a) a$ . Den samme Potentsation griber man til, naar man søger et algebraisk Udtryk for Indholdet og Beliggenheden af hver af de 8 kongruente Terninger, som lade sig anbringe omkring Koordinaternes Begyndelsespunkt i et retvinklet Koordinatsystem med tre Axer. 6 af disse Terninger finde deres Udtryk i et Produkt af tre numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn.

Ligesom en Potentsation af en Rod med konstant Fortegn har sin Modsætning i en Opløsning i numerisk ligestore Faktorer med samme Fortegn, saaledes har en Potentsation af en Rod med alternerende Fortegn sin Modsætning i en Opløsning i numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn. Det er, kan man sige, besynderligt, at man i den matematiske Literatur hverken ser noget til en Potentsation af en Rod med alternerende Fortegn, eller til en Opløsning, Dekomposition af en Størrelse i numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn. Man har, om jeg ikke feiler, ganske overseet Alternationspotentser og Alternationsrødder, medens man under Trykket af eller belemret med  $\sqrt{-1}$ , som ikke lod sig afvise, gav sig til at opspinde en Lære om Størrelser, som ikke ere til.

## § 2.

Enhver Størrelse er lig Produktet af det Sæt Faktorer, hvori den er blevet opløst eller spaltet.

Bortseet fra Irrationaliteten, lader enhver positiv arithmetisk Størrelse sig spalte: a) i hvilketsomhelst Antal numerisk ligestore positive Faktorer, b) i hvilketsomhelst lige Antal numerisk ligestore negative Faktorer, og c) i hvilket-somhelst Antal numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn, hvoriblandt der er et lige Antal  $(-)$ . Ex.  $16 = 2 (-2) 2 (-2)$ ,  $27 = (-3) 3 (-3)$ .

Bortseet fra Irrationaliteten, lader enhver negativ arithmetisk Størrelse sig spalte: a) i hvilketsomhelst ulige Antal numerisk ligestore negative Faktorer, og b) i hvilketsomhelst Antal numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn, hvoriblandt der findes et ulige Antal  $(-)$ . Ex.  $-81 = (-9) 9$ ,  $-64 = 4 (-4) 4$ .

Lad  $\sqrt[n]{\pm A}$  være Udtrykket for at  $\pm A$  skal spaltes i numerisk ligestore Faktorer, eller — hvad der kommer ud paa det samme — at man skal søge den Talværdi, der, optrædende  $n$  Gange som Faktor med samme eller med alternerende Fortegn, leverer et Produkt  $= \pm A$ . I saa Fald vil  $\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^n$ , hvor  $n$  betegner et hvilketsomhelst Antal numerisk ligestore Faktorer uden Hensyn til disses Fortegn, være Udtrykket for Produktet af disse  $n$  Faktorer, hvori  $\pm A$  blev spaltet; altsaa

$$\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^n = \pm A \quad (1)$$

*Anmærkning.* Det maa udtrykkelig fremhæves, at tegnet,  $\sqrt{\phantom{x}}$ , kun kræver den derunder staaende Størrelse opløst i *numerisk* ligestore Faktorer, hvis Produkt er = bemeldte Størrelse, medens Tegnet,  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ , kræver den derunder staaende Størrelse opløst i *identiske* Faktorer, hvis Produkt er = Størrelsen. Numerisk ligestore kunne Faktorer være, hvad enten de have samme Fortegn eller ikke. Under en Opløsning i numerisk ligestore Faktorer rummes altsaa baade en Opløsning i identiske Faktorer og i numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn. Man støder derfor aldrig paa imaginære Størrelser, idet man gjør Brug af Tegnet  $\sqrt{\phantom{x}}$ . Det er den snævre Betydning af Tegnet,  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ , som skaber imaginære Størrelser.



Lader  $\pm A$  sig opløse i  $n$  numerisk ligestore Faktorer,  $a$ , med samme Fortegn, saa er  $a$   $n^{\text{te}}$  Rod af  $\pm A$  eller

$$\sqrt[n]{\pm A} = \pm a \quad (2)$$

og  $\pm A$  er  $n^{\text{te}}$  Potents af  $a$ , eller

$$\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^n = (\pm a)^n = \pm A \quad (3)$$

og i Almindelighed

$$\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^m = (\pm a)^m \quad (4)$$

Lader  $\pm A$  sig opløse i  $n$  numerisk ligestore Faktorer,  $a$ , med alternerende Fortegn, saa er  $a$   $n^{\text{te}}$  Alternativrod af  $\pm A$ , eller

$$\sqrt[n]{\pm A} = \pm a \mp, \S 1, (5)$$

og  $\pm A$  er  $n^{\text{te}}$  Alternationspotents af  $a$ , eller

$$\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^n = (\pm a \mp)^n = \pm A \quad (6)$$

og i Almindefighed

$$\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^m = (\pm a \mp)^m \quad (7)$$

### § 3.

Sætter man i § 2, (2)  $n=2$ , saa udkommer

$$\sqrt[2]{A} = \pm a,$$

da  $(-A)$  bortfalder, eftersom den negative Størrelse ikke lader sig spalte i to numerisk ligestore Faktorer med samme Fortegn. Ligesom man pleier at sætte  $\sqrt{-}$  i Stedet for  $\sqrt[2]{-}$ , saaledes kan man ogsaa sætte  $\sqrt{-}$  i Stedet for  $\sqrt[2]{-}$ . Saaledes faar man

$$\sqrt{A} = \pm a, \quad (1)$$

hvor  $\pm a$  er Kvadratrod af  $A$ ,

$$\left(\sqrt{A}\right)^2 = (\pm a)^2 = A \quad (2)$$

Bortseet fra Irrationaliteten, lader enhver positiv arithmetisk Størrelse sig spalte: a) i hvilket som helst Antal numerisk ligestore positive Faktorer, b) i hvilket som helst lige Antal numerisk ligestore negative Faktorer, og c) i hvilket som helst Antal numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn, hvoriblandt der er et lige Antal (—). Ex.  $16 = 2 (-2) 2 (-2)$ ,  $27 = (-3) 3 (-3)$ .

Bortseet fra Irrationaliteten, lader enhver negativ arithmetisk Størrelse sig spalte: a) i hvilket som helst ulige Antal numerisk ligestore negative Faktorer, og b) i hvilket som helst Antal numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn, hvoriblandt der findes et ulige Antal (—). Ex.  $-81 = (-9) 9$ ,  $-64 = 4 (-4) 4$ .

Lad  $\sqrt[n]{\pm A}$  være Udtrykket for at  $\pm A$  skal spaltes i  $n$  numerisk ligestore Faktorer med samme eller med alternerende Fortegn, og lad  $\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^n$  være Udtrykket for Produktet af disse Faktorer, saa har man

$$\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^n = \pm A. \quad (1)$$

*Anmærkning.* Det maa udtrykkelig fremhæves, at Tegnet,  $\sqrt{\phantom{x}}$ , kun kræver den derunder staaende Størrelse opløst i *numerisk* ligestore Faktorer, hvis Produkt er = bemeldte Størrelse, medens Tegnet,  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ , kræver den derunder staaende Størrelse opløst i *identiske* Faktorer, hvis Produkt er = Størrelsen. Numerisk ligestore kunne Faktorer være, hvad enten de have samme Fortegn eller ikke. Under en Opløsning i numerisk ligestore Faktorer rummes altsaa baade en Opløsning i identiske Faktorer og i numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn. Man støder derfor aldrig paa imaginære Størrelser, idet man gjør brug af Tegnet  $\sqrt{\phantom{x}}$ . Det er den snævre Betydning af Tegnet,  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ , som skaber imaginære Størrelser.

Lader  $\pm A$  sig opløse i  $n$  numerisk ligestore Faktorer,  $a$ , med samme Fortegn, saa er  $a$   $n^{\text{te}}$  Rod af  $\pm A$  eller

$$\sqrt[n]{\pm A} = \pm a \quad (2)$$

og  $\pm A$  er  $n^{\text{te}}$  Potents af  $a$ , eller

$$\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^n = (\pm a)^n = \pm A, \quad (3)$$

og i Almindelighed

$$\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^m = (\pm a)^m. \quad (4)$$

Lader  $\pm A$  sig opløse i  $n$  numerisk ligestore Faktorer,  $a$ , med alternerende Fortegn, saa er  $a$   $n^{\text{te}}$  Alternationsrod af  $\pm A$ , eller

$$\sqrt[n]{\pm A} = \pm a \mp, \quad \S 1, \quad (5)$$

og  $\pm A$  er  $n^{\text{te}}$  Alternationspotents af  $a$ , eller

$$\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^n = (\pm a \mp)^n = \pm A, \quad (6)$$

og i Almindelighed

$$\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^m = (\pm a \mp)^m. \quad (7)$$

### § 3.

Sætter man i § 2, (2)  $n = 2$ , saa udkommer

$$\sqrt[2]{A} = \pm a,$$

da  $(-A)$  bortfalder, eftersom den negative Størrelse ikke lader sig spalte i to numerisk ligestore Faktorer med samme Fortegn. Ligesom man pleier at sætte  $\sqrt{-}$  i Stedet for  $\sqrt[2]{-}$ , saaledes kan man ogsaa sætte  $\sqrt{-}$  i Stedet for  $\sqrt[2]{-}$ . Saaledes faar man

$$\sqrt{A} = \pm a, \quad (1)$$

hvor  $\pm a$  er Kvadratroden af  $A$ ,

$$(\sqrt{A})^2 = (\mp a)^2 = A. \quad (2)$$

Men naar  $A = a^2$ ,

Men naar  $A = a^2$

saa er  $\sqrt{A} = \pm a$

altsaa  $\sqrt{A} = |\overline{A}|$  (3)

og  $(\sqrt{A})^m = (|\overline{A}|)^m$  (4)

Det kommer saaledes ud paa det samme, om man stiller en positiv Størrelse under tegnet  $\sqrt{\phantom{x}}$  eller under  $|\overline{\phantom{x}}|$ . Naar det gjælder en positiv Størrelse, kan man altsaa sætte  $|\overline{\phantom{x}}|$  i Stedet for  $\sqrt{\phantom{x}}$ .

#### § 4.

Ifølge læren om de imaginære Størrelser er

$$(\pm \sqrt{-a^2})^2 = -a^2 \quad (1)$$

$$(+ \sqrt{-a^2})(- \sqrt{-a^2}) = a^2 \quad (2)$$

$$(\pm \sqrt{-a^2})^{2n} = (-a^2)^n \quad (3)$$

$$(\pm \sqrt{-a^2})^{2n+2} = (-a^2)^{n+1} \quad (4)$$

$$(\pm \sqrt{-a^2})^{2n+1} = (-a^2)^n (\pm \sqrt{-a^2}) \quad (5)$$

Ifølge samme Lære er

$$(\pm a \sqrt{-1})^2 = -a^2 \quad (6)$$

$$(+a \sqrt{-1})(-a \sqrt{-1}) = a^2 \quad (7)$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{2n} = (-a^2)^n \quad (8)$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{2n+2} = (-a^2)^{n+1} \quad (9)$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{2n+1} = (-a^2)^n (\pm a \sqrt{-1}) \quad (10)$$

altsaa

$$\pm \sqrt{-a^2} = \pm a \sqrt{-1} \quad (11)$$

$$(\pm \sqrt{-a^2})^2 = (\pm a \sqrt{-1})^2 \quad (12)$$

$$(\pm \sqrt{-a^2})^{2n} = (\pm a \sqrt{-1})^{2n} \quad (13)$$



Fremdeles er

$$(\pm \alpha \pm \mathcal{Z} \sqrt{-1})^n = \pm A \pm B \sqrt{-1} \quad (14)$$

hvor  $A$  og  $B$  ere reelle Størrelser og, naar

$$B = 0,$$

$$(\pm \alpha \pm \mathcal{Z} \sqrt{-1})^n = \pm A \quad (15)$$

Endvidere er

$$(\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})(\alpha_1 + \mathcal{Z}_1 \sqrt{-1}) = \alpha \alpha_1 - \mathcal{Z} \mathcal{Z}_1 + (\alpha \mathcal{Z}_1 + \alpha_1 \mathcal{Z}) \sqrt{-1} \quad (16)$$

$$(\alpha - \mathcal{Z} \sqrt{-1})(\alpha_1 - \mathcal{Z}_1 \sqrt{-1}) = \alpha \alpha_1 - \mathcal{Z} \mathcal{Z}_1 - (\alpha \mathcal{Z}_1 + \alpha_1 \mathcal{Z}) \sqrt{-1} \quad (17)$$

Enhver af disse Ligninger er, ligesom Læren om de imaginære Størrelser i det Hele, baseret paa den Forudsætning, at der gives en lige Rod af den negative Størrelse. Men da Forudsætningen ikke finder Sted, saa er naturligvis enhver af Ligningerne en Bygning uden Grundvold, en tom Formel, en Fiktion uden faktisk Sandhed. Der kan ikke være Tale om at disse Ligninger ere rigtige, naar undtages, at man kan sige, at de vilde være rigtige, hvis der gaves en Kvadratrod af den negative Størrelse. Der gives imidlertid Tilfælde, hvori man ved saadanne Ligninger, saadanne Formler ledes til faktisk sande Resultater. Multiplicerer man med hinanden f. Ex. de paa venstre Side af Lighedstegnet staaende Dele af Ligningerne (16) og (17), ligeledes de samme Ligningers paa høire Side af Lighedstegnet staaende Dele, saa udkommer

$$(\alpha^2 + \mathcal{Z}^2)(\alpha_1^2 + \mathcal{Z}_1^2) = (\alpha \alpha_1 - \mathcal{Z} \mathcal{Z}_1)^2 + (\alpha \mathcal{Z}_1 + \alpha_1 \mathcal{Z})^2. \quad (18)$$

At denne Ligning er faktisk sand for hele Tals Vedkommende, kan man overbevise sig om, ved at give  $\alpha$ ,  $\mathcal{Z}$ ,  $\alpha_1$  og  $\mathcal{Z}_1$  specielle Talværdier. Ligningen (18) afgiver dog kun et Exempel paa, at Læren om de imaginære Størrelser ikke ligger i Strid med sig selv; den beviser ikke, at en virkelig Størrelse lader sig frembringe af en fingeret Størrelse. Den paa venstre Side af Lighedstegnet staaende Del af Ligningen (18) er nemlig ikke et virkeligt Produkt af de paa

saa er  $\sqrt{A} = \pm a,$

altsaa  $\sqrt{A} = |\overline{A}|$  (3)

og  $(\sqrt{A})^m = (|\overline{A}|)^m.$  (4)

Det kommer saaledes ud paa det samme, om man stiller en positiv Størrelse under tegnet  $\sqrt{\phantom{x}}$  eller under  $|\overline{\phantom{x}}|$ . Naar det gjælder en positiv Størrelse, kan man altsaa sætte  $|\overline{\phantom{x}}|$  i Stedet for  $\sqrt{\phantom{x}}$ .

#### § 4.

Ifølge læren om de imaginære Størrelser er

$$(\pm \sqrt{-a^2})^2 = -a^2, \quad (1)$$

$$(+ \sqrt{-a^2})(- \sqrt{-a^2}) = a^2, \quad (2)$$

$$(\pm \sqrt{-a^2})^{2n} = (-a^2)^n, \quad (3)$$

$$(\pm \sqrt{-a^2})^{2n+2} = (-a^2)^{n+1}, \quad (4)$$

$$(\pm \sqrt{-a^2})^{2n+1} = (-a^2)^n (\pm \sqrt{-a^2}). \quad (5)$$

Ifølge samme Lære er

$$(\pm a \sqrt{-1})^2 = -a^2, \quad (6)$$

$$(+a \sqrt{-1})(-a \sqrt{-1}) = a^2, \quad (7)$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{2n} = (-a^2)^n, \quad (8)$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{2n+2} = (-a^2)^{n+1}, \quad (9)$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{2n+1} = (-a^2)^n (\pm a \sqrt{-1}); \quad (10)$$

altsaa

$$\pm \sqrt{-a^2} = \pm a \sqrt{-1}, \quad (11)$$

$$(\pm \sqrt{-a^2})^2 = (\pm a \sqrt{-1})^2, \quad (12)$$

$$(\pm \sqrt{-a^2})^{2n} = (\pm a \sqrt{-1})^{2n}, \quad (13)$$

Fremdeles er

$$(\pm \alpha \pm \mathcal{Z} \sqrt{-1})^n = \pm A \pm B \sqrt{-1}, \quad (14)$$

hvor  $A$  og  $B$  ere reelle Størrelser og, naar

$$B = 0,$$

$$(\pm \alpha \pm \mathcal{Z} \sqrt{-1})^n = \pm A. \quad (15)$$

Endvidere er

$$(\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})(\alpha_1 + \mathcal{Z}_1 \sqrt{-1}) = \alpha \alpha_1 - \mathcal{Z} \mathcal{Z}_1 + (\alpha \mathcal{Z}_1 + \alpha_1 \mathcal{Z}) \sqrt{-1}, \quad (16)$$

$$(\alpha - \mathcal{Z} \sqrt{-1})(\alpha_1 - \mathcal{Z}_1 \sqrt{-1}) = \alpha \alpha_1 - \mathcal{Z} \mathcal{Z}_1 - (\alpha \mathcal{Z}_1 + \alpha_1 \mathcal{Z}) \sqrt{-1}. \quad (17)$$

Enhver af disse Ligninger er, ligesom Læren om de imaginære Størrelser i det Hele, baseret paa den Forudsætning, at der gives en lige Rod af den negative Størrelse. Men da Forudsætningen ikke finder Sted, saa er naturligvis enhver af Ligningerne en Bygning uden Grundvold, en tom Formel, en Fiktion uden faktisk Sandhed. Der kan ikke være Tale om at disse Ligninger ere rigtige, naar undtages, at man kan sige, at de vilde være rigtige, hvis der gaves en Kvadratrods af den negative Størrelse. Der gives imidlertid Tilfælde, hvori man ved saadanne Ligninger, saadanne Formler ledes til faktisk sande Resultater. Multiplicerer man med hinanden f. Ex. de paa venstre Side af Lighedstegnet staaende Dele af Ligningerne (16) og (17), ligeledes de samme Ligningers paa høire Side af Lighedstegnet staaende Dele, saa udkommer

$$(\alpha^2 + \mathcal{Z}^2)(\alpha_1^2 + \mathcal{Z}_1^2) = (\alpha \alpha_1 - \mathcal{Z} \mathcal{Z}_1)^2 + (\alpha \mathcal{Z}_1 + \alpha_1 \mathcal{Z})^2. \quad (18)$$

At denne Ligning er faktisk sand for hele Tals Vedkommende, kan man overbevise sig om, ved at give  $\alpha$ ,  $\mathcal{Z}$ ,  $\alpha_1$  og  $\mathcal{Z}_1$  specielle Talværdier. Ligningen (18) afgiver dog kun et Exempel paa, at Læren om de imaginære Størrelser ikke ligger i Strid med sig selv; den beviser ikke, at en virkelig Størrelse lader sig frembringe af en fingeret Størrelse. Den paa venstre Side af Lighedstegnet staaende Del af Ligningen (18) er nemlig ikke et virkeligt Produkt af de paa

venstre Side af Lighedstegnet staaende Dele af Ligningerne (16) og (17). Ligesaa lidt er den paa høire Side af Lighedstegnet staaende Del af Ligningen (18) et virkeligt Produkt af de paa høire Side af Lighedstegnet staaende Dele af Ligningerne (16) og (17).

## § 5.

Sættes i § 2, (5)  $n = 2$ , saa bortfalder  $+A$ , der ikke lader sig opløse i to numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn og man faar i Analogi med § 3, (1).

$$|\overline{-A} = \pm a \mp$$

hvilket vil sige, at  $|\overline{-A}$  er et dobbeltydigt\*) eller modsattydigt Udtryk, der udenvidere med samme Føie kan tages i Betydningen  $(-a)$  som i Betydningen  $(+a)$ , altsaa dobbeltydigt med uafhængigt Valg, medens  $|\overline{A} = \sqrt{A} = \pm a$  er dobbeltydigt med afhængigt Valg.

Er

$$|\overline{A} = \pm a \mp$$

saa er

$$(|\overline{-A})^2 = (\pm a \mp)^2 = -a^2 = -A \quad \text{§ 2: (6)}$$

og

$$\pm |\overline{-a^2} = \pm (\pm a \mp)$$

altsaa

$$(\pm |\overline{-a^2})^2 = [\pm (\pm a \mp)]^2 = (\pm a \mp)^2$$

Men

$$(\pm a \mp)^2 = -a^2$$

altsaa

$$(\pm |\overline{-a^2})^2 = -a^2 ** \quad (1)$$

\*) Hvorvel Adjektiket, dobbeltydigt, hverken er særdeles betegnende eller udelukkende tilkommer  $|\overline{-A}$ , maa jeg dog i Mangel af et bedre Prædikat benytte Udtrykket: dobbeltydigt, som et Karakteristikon for  $|\overline{-A}$  og for de Forbindelser, hvori  $|\overline{-A}$  forekommer.

\*) Da man er vant til at tænke sig en Potentsexponent som Udtrykket for et Antal identiske Faktorer, bringes her i Erindring, at  $(|\overline{-a^2})^2$ , lige-

$$(+ \sqrt{-a^2}) (- \sqrt{-a^2}) = a^2 \quad (2)$$

$$[(\pm \sqrt{-a^2})^2]^n = (-a^2)^n \quad (1)$$

men

$$[(\pm \sqrt{-a^2})^2]^n = (\pm \sqrt{-a^2})^{2n}$$

altsaa

$$(\pm \sqrt{-a^2})^{2n} = (-a^2)^n \quad (3)$$

og

$$(\pm \sqrt{-a^2})^{2n+2} = (-a^2)^n (\pm \sqrt{-a^2})^2$$

Men

$$(-a^2)^n (\pm \sqrt{-a^2})^2 = (-a^2)^{n+1}$$

altsaa

$$(\pm \sqrt{-a^2})^{2n+2} = (-a^2)^{n+1} \quad (4)$$

og

$$(\pm \sqrt{-a^2})^{2n+1} = (-a^2)^{n+1} (\pm \sqrt{-a^2}) \quad (5)$$

Sættes  $a = 1$  i Ligningerne (1), (3), (4) og (5), saa udkommer, da  $1^2 = 1$ ,

$$(\pm \sqrt{-1^2})^2 = (\pm \sqrt{-1})^2 = -1 \quad (a)$$

$$(\pm \sqrt{-1^2})^{2n} = (\pm \sqrt{-1})^{2n} = (-1)^n \quad (b)$$

$$(\pm \sqrt{-1^2})^{2n+2} = (\pm \sqrt{-1})^{2n+2} = (-1)^{n+1} \quad (c)$$

$$(\pm \sqrt{-1^2})^{2n+1} = (\pm \sqrt{-1})^{2n+1} = (-1)^n (\pm \sqrt{-1}) \quad (d)$$

Nu er

$$\pm a \sqrt{-1} = a (\pm \sqrt{-1})$$

saavel er Udtrykket for Produktet af de to Faktorer,  $(+a)$  og  $(-a)$ , hvori  $(-a^2)$  lader sig opløse, som  $(\sqrt{-a^2})^2$  er Udtrykket for Produktet af de to Faktorer,  $(\pm a)$  og  $(\pm a)$ , hvori  $(+a^2)$  lader sig opløse. Vil man ikke lade den ene af de to i  $(\sqrt{-a^2})^2$  værende Faktorer,  $\sqrt{-a^2}$ , gjælde for  $(+a)$ , den anden for  $(-a)$ , men lade hver af dem gjælde enten for  $(+a)$  eller for  $(-a)$ , saa faar man

$$(\sqrt{-a^2})^2 = (\sqrt{a^2})^2,$$

hvilket er urimeligt.



altsaa

$$(\pm a \sqrt{-1})^2 = a^2 (\pm \sqrt{-1})^2 = -a^2 \quad (a) \quad (6)$$

$$(+ a \sqrt{-1}) (- a \sqrt{-1}) = a^2 \quad (7)$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{2n} = a^{2n} (\pm \sqrt{-1})^{2n} = (-a^2)^n \quad (b) \quad (8)$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{2n+2} = (-a^2)^n (-a^2) = (-a^2)^{n+1} \quad (c) \quad (9)$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{2n+1} = (-a^2)^n (\pm a \sqrt{-1}) \quad (d) \quad (10)$$

Fremdeles da

$$\sqrt{-a^2} = \pm a \mp$$

og

$$a \sqrt{-1} = a (\pm 1 \mp) = \pm a \mp$$

saa er

$$\sqrt{-a^2} = a \sqrt{-1}$$

og

$$\pm \sqrt{-a^2} = \pm a \sqrt{-1} \quad (11)$$

$$(\pm \sqrt{-a^2})^2 = (\pm a \sqrt{-1})^2 \quad (12)$$

$$(\pm \sqrt{-a^2})^{2n} = (\pm a \sqrt{-1})^{2n} \quad (13)$$

o. s. v.

Giver man  $n$  i Ligningen (8) Værdierne: 1, 2, 3, 4, o. s. v.,  
udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^2 = -a^2$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^4 = a^4$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^6 = -a^6$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^8 = a^8 \quad (e)$$

o. s. v.

Giver man  $n$  i Ligningen (10) Værdierne: 1, 2, 3, 4, o. s. v.,  
udkommer

$$\begin{aligned}
 (+ a \sqrt{-1})^3 &= \mp a^3 \sqrt{-1} \\
 (\pm a \sqrt{-1})^5 &= \pm a^5 \sqrt{-1} \\
 (\pm a \sqrt{-1})^7 &= \mp a^7 \sqrt{-1}
 \end{aligned} \tag{f}$$

o. s. v.

Ved Hjælp af Newtons Binominalformel og ovenstaaende Ligninger (e) og (f) finder man at

$$(\pm a \pm \mathcal{Z} \sqrt{-1})^n = \pm A \pm B \sqrt{-1} \tag{14}$$

hvor  $A$  og  $B$  have de samme Værdier, som i § 4, (14), og, naar

$$B = 0$$

$$(\pm a \pm \mathcal{Z} \sqrt{-1})^n = \pm A \tag{15}$$

Endvidere er

$$(\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})(\alpha_1 + \mathcal{Z}_1 \sqrt{-1}) = \alpha \alpha_1 - \mathcal{Z} \mathcal{Z}_1 + (\alpha \mathcal{Z}_1 + \alpha_1 \mathcal{Z}) \sqrt{-1} \tag{16}$$

$$(\alpha - \mathcal{Z} \sqrt{-1})(\alpha_1 - \mathcal{Z}_1 \sqrt{-1}) = \alpha \alpha_1 - \mathcal{Z} \mathcal{Z}_1 - (\alpha \mathcal{Z}_1 + \alpha_1 \mathcal{Z}) \sqrt{-1} \tag{17}$$

og naar man multiplicerer med hinanden disse Ligningers paa samme Side af Lighedstegnet staaende Dele, udkommer

$$(\alpha^2 + \mathcal{Z}^2)(\alpha_1^2 + \mathcal{Z}_1^2) = (\alpha \alpha_1 - \mathcal{Z} \mathcal{Z}_1)^2 + (\alpha \mathcal{Z}_1 + \alpha_1 \mathcal{Z})^2 \tag{18}$$

Sammenholder man de numererede Ligninger i § 4 med de numererede do. i § 5, saa finder man ingen anden Forskel mellem dem end at de førstnævnte fra og med (1) til og med (17) ere imaginære, og at de sidstnævnte ere reelle.  $\sqrt{-1}$  og  $\sqrt{-a^2}$  spiller respektive ganske den samme Rolle i § 5 som  $\sqrt{-1}$  og  $\sqrt{-a^2}$  i § 4, eller alt, hvad der udtales om den imaginære Kvadratrod i § 4, gjentages om andengrads Alternativrod i § 5.

## § 6.

Sættes  $n = 2p$  i § 4, (8), udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^{4p} = (-a^2)^{2p} \quad (1)$$

Giver man  $p$  i denne Ligning Værdierne: 1, 2, 3, o. s. v., udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^4 = (-a^2)^2 = a^4$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^8 = (-a^2)^4 = a^8$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{12} = (-a^2)^6 = a^{12}$$

o. s. v.

Sættes  $n = 2p$  i § 4, (9), udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^{4p+2} = (-a^2)^{2p+1} \quad (2)$$

Giver man  $p$  i denne Ligning Værdierne: 0, 1, 2, 3, o. s. v., udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^2 = -a^2$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^6 = (-a^2)^3 = -a^6$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{10} = (-a^2)^5 = -a^{10}$$

o. s. v.

Til disse i § 4 antydede Exempler, samt det i samme §, (15) anførte Exempel, paa, at Operationer med den imaginære Kvadratrod fører til reelle Resultater, føies endnu følgende.

$$(a \pm \alpha \sqrt{-A}) + (b \mp \alpha \sqrt{-A}) = a + b \quad (3)$$

$$(a \pm \alpha \sqrt{-A}) - (b \pm \alpha \sqrt{-A}) = a - b \quad (4)$$

$$(\pm \alpha \sqrt{-A}) (\pm \beta \sqrt{-A}) = \alpha \beta (-A) \quad (5)$$

$$(a \pm \alpha \sqrt{-A}) (a \mp \alpha \sqrt{-A}) = a^2 + \alpha^2 A \quad (6)$$

$$(\pm \alpha \sqrt{-A}) : (\pm \beta \sqrt{-A}) = \frac{\alpha}{\beta} \quad (7)$$

$$\pm \alpha (\sqrt{-A})^{2n+1} : \pm \beta \sqrt{-A} = \frac{\alpha}{\beta} (-A)^n \quad (8)$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x \quad (9)$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin x \quad (10)$$

## § 7.

Sætter man  $n = 2p$  i § 5, (8), udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^{4p} = (-a^2)^{2p} \quad (1)$$

Gives  $p$  i denne Ligning Værdierne: 1, 2, 3, 4, o. s. v., udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^4 = (-a^2)^2 = a^4$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^8 = (-a^2)^4 = a^8$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{12} = (-a^2)^6 = a^{12}$$

o. s. v.

Sættes  $n = 2p$  i § 5, (9), udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^{4p+2} = (-a^2)^{4p+1} \quad (2)$$

Giver man  $p$  i denne Ligning Værdierne: 0, 1, 2, 3, o. s. v., udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^2 = -a^2$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^6 = -a^6$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{10} = -a^{10}$$

o. s. v.

$$(a \pm \alpha \sqrt{-A}) + (b \mp \alpha \sqrt{-A}) = a + b \quad (3)$$

$$(a \pm \alpha \sqrt{-A}) - (b \pm \alpha \sqrt{-A}) = a - b \quad (4)$$

### Rettelser.

Pag. 117. Til Definitionen: En Potents er et Produkt af numerisk ligestore Faktorer, føies: hvad enten Faktorerne have samme Fortegn eller alternerende Fortegn.

„ 119. Til Anmærkningen føies den Restriktion, at  $\sqrt[n]{-A}$  er imaginær, naar  $n$  er et helt Tal deleligt med 4.

---





De her vedheftede Blade Pag. 117—21 og 125—30 bedes ombyttede med de tilsvarende Pag. i forrige Hefte.



have nogen Adkomst til dette Navn. Men da man har for Skik, ved ligestore Faktorer at forstaa identiske Faktorer  $\circ$ : Faktorer med samme Talværdi og Fortegn, saa er den anførte Definition paa Potents for trang til at rumme Leddene i Rækkerne (3) og (4). En Definition, som skulde kunne omfatte hvert Led i alle disse Rækker, maatte lyde saaledes: En Potents er et Produkt af numerisk ligestore Faktorer, hvad enten Faktorerne have samme Fortegn eller alternerende Fortegn. I Henhold til denne Definition vilde man kunne sige: 1) at Faktor,  $a$ , i Leddene af Rækken (1) og (2) er en Rod med konstant Fortegn; 2) at ethvert Led i disse Rækker er en Potents af en Rod med konstant Fortegn; 3) at Faktor,  $a$ , i Leddene af Rækkerne (3) og (4) er en Rod med alternativt Fortegn, eller en Alternationsrod; og 4) at ethvert Led i sidstnævnte Rækker er en Potents af en Rod med alternerende Fortegn, eller en Alternationspotents. Ifølge samme Definition kommer en Potentsexponent til at betegne Antallet af de numerisk ligestore Faktorer, hvis Produkt er = Potentsen, hvad enten disse Faktorer have samme Fortegn eller alternerende Fortegn.

Det har naturligvis sine Vanskeligheder, at blive fortrolig med en saadan Udvidelse af tilvante Begreber, eller egentligere: med en saadan Subsumtion af tilvante Begreber under videre Begreber, hvortil man ikke er vant, ligeledes med den deraf følgende Terminologi. Hvorvidt en saadan Subsumtion vil blive anseet nødvendig og en saadan Terminologi hensigtsmæssig, maa staa derhen. Men hvad der ikke bør staa derhen, er Erkjendelsen af at hverken den i Rækkerne (3) og (4) anvendte Operationsmaade eller de derved fremkomne Led ere blotte Fantasifostre. Man ved, hvad man gjør, og forstaar, hvad man faar ud, naar man multiplicerer  $(\pm a)$  med  $(\mp a)$  o. s. v., hvorimod man, idet man multiplicerer  $\sqrt{-1}$  med  $\sqrt{-1}$  og faar ud  $(-1)$ , forholder sig som en Magus, der ikke begriber sine egne Kunststykker.

De Operationsmaader, som udtrykkes ved  $(+a)^n$ ,  $(-a)^n$ ,  $(+a-)^n$  og  $(-a+)^n$ , ere beslægtede Anvendelser in concreto af det abstrakte  $(a)^n$ . At en Potentsation af en Rod med alternerende Fortegn ikke blot lader sig tænke, men ogsaa anvende, fremgaar f. Ex. deraf, at man uvilkaarlig kommer til at gjøre Brug af samme, naar man søger et algebraisk Udtryk for Indholdet og Beliggenheden af hvert af de 4 kongruente Kvadrater, som lade sig konstruere omkring Koordinaternes Begyndelsespunkt i et retvinklet Koordinatsystem med to Axer. Er en Side i disse Kvadrater  $= a$ , saa finder det ene af disse Kvadrater sit Udtryk i  $a(-a)$ , et andet i  $(-a)a$ . Den samme Potentsation griber man til, naar man søger et algebraisk Udtryk for Indholdet og Beliggenheden af hver af de 8 kongruente Terninger, som lade sig anbringe omkring Koordinaternes Begyndelsespunkt i et retvinklet Koordinatsystem med tre Axer. 6 af disse Terninger finde deres Udtryk i et Produkt af tre numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn.

Ligesom en Potentsation af en Rod med konstant Fortegn har sin Modsætning i en Opløsning i numerisk ligestore Faktorer med samme Fortegn, saaledes har en Potensation af en Rod med alternerende Fortegn sin Modsætning i en Opløsning i numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn. Det er, kan man sige, besynderligt, at man i den mathematiske Literatur hverken ser noget til en Potentsation af en Rod med alternerende Fortegn, eller til en Opløsning, Dekomposition af en Størrelse i numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn. Man har, om jeg ikke feiler, ganske overseet Alternationspotentser og Alternationsrødder, medens man under Trykket af eller belemret med  $\sqrt{-1}$ , som ikke lod sig afvise, gav sig til at opspinde en Lære om Størrelser, som ikke ere til.

## § 2.

Enhver Størrelse er lig Produktet af det Sæt Faktorer, hvori den er blevet opløst eller spaltet.



Bortseet fra Irrationaliteten, lader enhver positiv arithmetisk Størrelse sig spalte: a) i hvilket som helst Antal numerisk ligestore positive Faktorer, b) i hvilket som helst lige Antal numerisk ligestore negative Faktorer, og c) i hvilket som helst Antal numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn, hvoriblandt der er et lige Antal (—). Ex.  $16 = 2 (-2) 2 (-2)$ ,  $27 = (-3) 3 (-3)$ .

Bortseet fra Irrationaliteten, lader enhver negativ arithmetisk Størrelse sig spalte: a) i hvilket som helst ulige Antal numerisk ligestore negative Faktorer, og b) i hvilket som helst Antal numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn, hvoriblandt der findes et ulige Antal (—). Ex.  $-81 = (-9) 9$ ,  $-64 = 4 (-4) 4$ .

Lad  $\sqrt[n]{\pm A}$  være Udtrykket for at  $\pm A$  skal spaltes i  $n$  numerisk ligestore Faktorer med samme eller med alternerende Fortegn, og lad  $\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^n$  være Udtrykket for Produktet af disse Faktorer, saa har man

$$\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^n = \pm A. \quad (1)$$

*Anmærkning.* Det maa udtrykkelig fremhæves, at Tegnet,  $\sqrt{\phantom{x}}$ , kun kræver den derunder staaende Størrelse opløst i *numerisk* ligestore Faktorer, hvis Produkt er = bemeldte Størrelse, medens Tegnet,  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ , kræver den derunder staaende Størrelse opløst i *identiske* Faktorer, hvis Produkt er = Størrelsen, Numerisk ligestore kunne Faktorer være, hvad enten de have samme Fortegn eller ikke. Under en Opløsning i numerisk ligestore Faktorer rummes altsaa baade en Opløsning i identiske Faktorer og i numerisk ligestore Faktorer med alternerende Fortegn. Man støder derfor ikke paa imaginære Størrelser, idet man gjør brug af Tegnet  $\sqrt{\phantom{x}}$ . Det er den snævre Betydning af Tegnet,  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ , som skaber imaginære Størrelser. Herved er dog at bemærke, at  $\sqrt[n]{-A}$  er imaginær, naar  $n$  er delelig med 4.

Lader  $\pm A$  sig opløse i  $n$  numerisk ligestore Faktorer,  $a$ , med samme Fortegn, saa er  $a$   $n^{\text{te}}$  Rod af  $\pm A$  eller

$$\sqrt[n]{\pm A} = \pm a \quad (2)$$

og  $\pm A$  er  $n^{\text{te}}$  Potents af  $a$ , eller

$$\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^n = (\pm a)^n = \pm A, \quad (3)$$

og i Almindelighed

$$\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^m = (\pm a)^m. \quad (4)$$

Lader  $\pm A$  sig opløse i  $n$  numerisk ligestore Faktorer,  $a$ , med alternerende Fortegn, saa er  $a$   $n^{\text{te}}$  Alternationsrod af  $\pm A$ , eller

$$\sqrt[n]{\pm A} = \pm a \mp, \quad \S 1, (5)$$

og  $\pm A$  er  $n^{\text{te}}$  Alternationspotents af  $a$ , eller

$$\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^n = (\pm a \mp)^n = \pm A, \quad (6)$$

og i Almindelighed

$$\left(\sqrt[n]{\pm A}\right)^m = (\pm a \mp)^m. \quad (7)$$

### § 3.

Sætter man i § 2, (2)  $n=2$ , saa udkommer

$$\sqrt[2]{A} = \pm a,$$

da  $(-A)$  bortfalder, eftersom den negative Størrelse ikke lader sig spalte i to numerisk ligestore Faktorer med samme Fortegn. Ligesom man pleier at sætte  $\sqrt{-}$  i Stedet for  $\sqrt[2]{-}$ , saaledes kan man ogsaa sætte  $\sqrt{-}$  i Stedet for  $\sqrt[2]{-}$ . Saaledes faar man

$$\sqrt{A} = \pm a, \quad (1)$$

hvor  $\pm a$  er Kvadratrodten af  $A$ ,

$$(\sqrt{A})^2 = (\mp a)^2 = A. \quad (2)$$

Men naar  $A = a^2$ ,

altsaa

$$(\pm a \overline{-1})^2 = -a^2 \quad (\pm \overline{-1})^2 = -a^2 \quad (a) \quad (6)$$

$$(+ a \overline{-1}) (- a \overline{-1}) = a^2, \quad (7)$$

$$(\pm a \overline{-1})^{2n} = a^{2n} (\pm \overline{-1})^{2n} = (-a^2)^n \quad (b) \quad (8)$$

$$(\pm a \overline{-1})^{2n+2} = (-a^2)^n (-a^2) = (-a^2)^{n+1} \quad (c) \quad (9)$$

$$(\pm a \overline{-1})^{2n+1} = (-a^2)^n (\pm a \overline{-1}) \quad (d) \quad (10)$$

Fremdeles da

$$\overline{-a^2} = \pm a \mp$$

og

$$a \overline{-1} = a (\pm 1 \mp) = \pm a \mp$$

saa er

$$\overline{-a^2} = a \overline{-1}$$

og

$$\pm \overline{-a^2} = \pm a \overline{-1} \quad (11)$$

$$(\pm \overline{-a^2})^2 = (\pm a \overline{-1})^2 \quad (12)$$

$$(\pm \overline{-a^2})^{2n} = (\pm a \overline{-1})^{2n} \quad (13)$$

o. s. v.

Giver man  $n$  i Ligningen (8) Værdierne: 1, 2, 2, 4, o. s. v.,  
udkommer

$$(\pm a \overline{-1})^2 = -a^2$$

$$(\pm a \overline{-1})^4 = a^4$$

$$(\pm a \overline{-1})^6 = -a^6$$

$$(\pm a \overline{-1})^8 = a^8 \quad (e)$$

o. s. v.

Giver man  $n$  i Ligningen (10) Værdierne: 1, 2, 3, 4, o. s. v.,  
udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^3 = \mp a^3 \sqrt{-1}$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^5 = \pm a^5 \sqrt{-1}$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^7 = \mp a^7 \sqrt{-1}$$

Ved Hjælp af Newtons Binominalformel og ovenstaaende Ligninger (e) og (f) finder man at

$$(\pm a \pm \mathcal{Z} \sqrt{-1})^n = \pm A \pm B \sqrt{-1} \quad (14)$$

hvor  $A$  og  $B$  have de samme Værdier, som i § 4, (14) og, naar

$$B = 0$$

$$(\pm a \pm \mathcal{Z} \sqrt{-1})^n = \pm A \quad (15)$$

Endvidere er

$$(\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})(\alpha_1 + \mathcal{Z}_1 \sqrt{-1}) = \alpha\alpha_1 - \mathcal{Z}\mathcal{Z}_1 + (\alpha\mathcal{Z}_1 + \alpha_1\mathcal{Z}) \sqrt{-1} \quad (16)$$

$$(\alpha - \mathcal{Z} \sqrt{-1})(\alpha_1 - \mathcal{Z}_1 \sqrt{-1}) = \alpha\alpha_1 - \mathcal{Z}\mathcal{Z}_1 - (\alpha\mathcal{Z}_1 + \alpha_1\mathcal{Z}) \sqrt{-1} \quad (17)$$

og naar man multiplicerer med hinanden disse Ligningers paa samme Side af Lighedstegnet staaende Dele, udkommer

$$(\alpha^2 + \mathcal{Z}^2)(\alpha_1^2 + \mathcal{Z}_1^2) = (\alpha\alpha_1 - \mathcal{Z}\mathcal{Z}_1)^2 + (\alpha\mathcal{Z}_1 + \alpha_1\mathcal{Z})^2 \quad (18)$$

Sammenholder man de numererede Ligninger i § 4 med de numererede do. i § 5, saa finder man ingen anden Forskjel mellem dem end at de førstnævnte fra og med (1) til og med (17) ere imaginære, og at de sidstnævnte ere reelle.  $\sqrt{-1}$  og  $\sqrt{-a^2}$  spiller respektive ganske den samme Rolle i § 5 som  $\sqrt{-1}$  og  $\sqrt{-a^2}$  i § 4, eller alt, hvad der udtales om den imaginære Kvadratrod i § 4, gjentages om andengrads Alternativrod i § 5.

## § 6.

Sættes  $n = 2p$  i § 4, (8), udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^{4p} = (-a^2)^{2p} \quad (1)$$

Giver man  $p$  i denne Ligning Værdierne: 1, 2, 3, o. s. v., udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^4 = (-a^2)^2 = a^4$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^8 = (-a^2)^4 = a^8$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{12} = (-a^2)^6 = a^{12}$$

o. s. v.

Sættes  $n = 2p$  i § 4, (9), udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^{4p+2} = (-a^2)^{2p+1} \quad (2)$$

Giver man  $p$  i denne Ligning Værdierne: 0, 1, 2, 3, o. s. v., udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^2 = -a^2$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^6 = (-a^2)^3 = -a^6$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{10} = (-a^2)^5 = -a^{10}$$

o. s. v.

Til disse i § 4 antydede Exempler, samt det i samme §, (15) anførte Exempel, paa, at Operationer med den imaginære Kvadratrods fører til reelle Resultater, føies endnu følgende.

$$(a \pm \alpha \sqrt{-A}) + (b \mp \alpha \sqrt{-A}) = a + b \quad (3)$$

$$(a \pm \alpha \sqrt{-A}) - (b \pm \alpha \sqrt{-A}) = a - b \quad (4)$$

$$(\pm \alpha \sqrt{-A}) (\pm \beta \sqrt{-A}) = \alpha \beta (-A) \quad (5)$$

$$(a \pm \alpha \sqrt{-A}) (a \mp \alpha \sqrt{-A}) = a^2 + \alpha^2 A \quad (6)$$

$$(\pm \alpha \sqrt{-A}) : (\pm \beta \sqrt{-A}) = \frac{\alpha}{\beta} \quad (7)$$



$$\pm \alpha (\sqrt{-A})^{2n+1} : \pm \beta \sqrt{-A} = \frac{\alpha}{\beta} (-A)^n \quad (8)$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x \quad (9)$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin x \quad (10)$$

## § 7.

Sætter man  $n = 2p$  i § 5, (8), udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^{4p} = (-a^2)^{2p} \quad (1)$$

Gives  $p$  i denne Ligning Værdierne: 1, 2, 3, 4, o. s. v., udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^4 = (-a^2)^2 = a^4$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^8 = (-a^2)^4 = a^8$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{12} = (-a^2)^6 = a^{12}$$

o. s. v.

Sættes  $n = 2p$  i § 5, (9), udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^{4p+2} = (-a^2)^{4+1} \quad (2)$$

Giver man  $p$  i denne Ligning Værdierne: 0, 1, 2, 3, o. s. v., udkommer

$$(\pm a \sqrt{-1})^2 = -a^2$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^6 = -a^6$$

$$(\pm a \sqrt{-1})^{10} = -a^{10}$$

o. s. v.

$$(a \pm a \sqrt{-A}) + (b \mp a \sqrt{-A}) = a + b \quad (3)$$

$$(a \pm a \sqrt{-A}) - (b \pm a \sqrt{-A}) = a - b \quad (4)$$

Negerstaat Ogbono. Auf dem boden des Eismeeres. Zur Mystik d. Thierwelt. Die philosophische Grundlage d. Chemie. Einiges über tertiäre und quartäre Bildungen im Vorlande d. Alpen. Zwischen Enns u. Salzach. Ueber d. Verhalten einiger Körper beim Uebergange der festen Aggregatzustand u. daraus sich ergebende Folgen. Ueber verschiedene körperliche Auslegung planimetrischer Figuren. Das eigenthümliche Verhalten verschiedener Körper bei fortgesetzter Temperaturerhöhung. Berichte über die Entstehung u. seitherige Entwicklung d. Vereines f. Naturkunde, Garten u. Obstbau zu Neuwied. Nordseeküste u. Paraná-Delta. Lagos an d. Guineaküste. Ueber thierische Pflanzen-Schinaretzer. Professor dr. Paul Günther Lorentz. Was man im Monde sieht. Die Hakoner Gebiet und d. Fujiyama. Aus Insel-Indien. Der Hausthiergarten d. landwirthschaftl. Institut d. Univers. Halle.

**La nature.** Revue des sciences. Journal hebdom. illustré. Redact. Gaston Tissandier. Pr. pr. Aarg. 22,00. Uddrag af Indh. Bulletin météorologique hebdomaire. Le météorographe enregistreur de M. Theorell. Le bombardement d'une montagne. Le canal de Panama. La mission de Laponnie. La distribution de l'électricité. Les transformateurs. Le service des signaux de l'armée aux États-Unis. Thermomètre enregistreur de mm. Richard frères. L'emploi du pétrole comme combustible. Voyage aux grandes Andes équatoriales par m. Edm. Whymper. La distribution de l'électricité. Le cimetière mérovingien de Caulaincourt. L'exposition d'électricité. La lampe soleil; l'éclairage électr.; téléphone receptr. à surexcitateur de m. Ader; le tramway électr.; le petit aérostate électr.; Météorographe universel de mm. von Rysselberghe et Schubert; la clôture. Le télégraphe autographique d'Edison. Un bateau rapide. Les Mound builders. Nouvelle disposition du couple au sulfate de cuivre par A. Gaiffe. Experiences de m. Bjerknes. Les pneumatiques de Héron d'Alexandrie. La viande de porc infectée. La force motrice à l'exposition d'électr. Le vélocipède unicycle de mm. Langmaak et Strief. Les accipents de chemins de fer. Les chemins de fer électriques à Paris. Les eaux de Paris. Poussières recueillies dans la neige. Le canal de l'Est. Appareil enregistreur de m. P. Samuel pour les signaux du galvanomètre à miroir. Le chien sauvage d'Australie. Intensité lumineuse de l'arc voltaïque. L'exposit. d'électric. le musée rétrospectif. Le service des signaux aux États-Unis. La balance d'induction de m. Hughes appliquée à la chirurgie. La puissance musculaire chez les insectes. Le vélocipède aquatique du prince de Galles. L'observatoire du Pic-du-midi. Les clichés de celluloid. Le télélogue, nouvel appareil de télégraphie optique du capitaine Gaumet. Les fuégiens du jardin d'acclimation. Expériences d'acoustique. Voyage de m. le dr. Crevaux dans l'Amérique du Sud. Curieuses haches en pierre. Sur l'existence d'un nouvel élément métallique, l'actinium, dans le zinc du commerce. Le chauffage par la vapeur aux États-Unis. Sur l'état intérieur du globe terrestre. L'Aye-Aye ou Chiromys en Madagascar. L'exposition d'électricité; quelques curiosités historiques. Un précurseur de Galvani. Les balances sans poids; la romaine automatique système. Une carrière de Mendon. Le ver de l'armée. Le contrôleur de marche des trains système Brunot. Bibliographie, Correspondance, Chronique. Académie des sciences. Boîte aux lettres, Recettes utiles. Bulletin météorologique de la semaine. Chronique. Bulletin météorologique hebdomaire. Boîte aux lettres.

---

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab udkommer med 1 Bind (4 Hefter) aarlig. Subscriptionsprisen er fastsat til 8 Kroner pr. Bind.

Syvende Binds første Hefte indeholder følgende Afhandlinger:

**G. O. Sars.** Revision af Gruppen: Isopoda chelifera med Charakteristik af nye herhen hørende Arter og Slægter.

**H. Geelmuyden.** Remarques sur la théorie de la lumière zodiacale.

**Elling Holst.** Ein Beitrag zur methodischen Behandlung der metrischen Eigenschaften algebraischer Kurven.

**Alb. Cammermeyer.**

---

7026  
Feb. 23. 1883

# Archiv

for

## Mathematik og Naturvidenskab.

Udgivet

af

Sophus Lie, Worm Müller og G. O. Sars.

---

Syvende Bind. Andet Hefte.



Kristiania.

Forlagt af Alb. Cammermeyer.

1882.

## Avertissements.

**Das Ausland.** Wochenschrift für Länder- u. Völkerkunde, unter Mitwirkg. von Prof. Dr. Friedr. Ratzel u. a. Fachmänner hrsg. Jährl. 52 Nrn. à 20 S. 4to. Pris pr. Aarg. Kr. 30,80. Indh. Die Transfusion d. Blutes. Glaube u. Aberglaube in d. Herzegowina. Von Athen nach Orchomenos. Ueber die Urbevölkerung Chinas. Ueber d. Schutzmittel d. Pflanzenblätter. Das Thonwagelchen, ein altindisches Schauspiel. Die brasilianische Achatzbeute in ihre Beziehungen zu Deutschland. Die Vegetationsformationen Neuholands. Ueber einen bis jetzt vernachlässigten Kulturmesser. Die Lebensdauer u. Vegetationsweise d. Pflanzen, ihre Ursachen u. ihre Entwicklung. Wirkungen d. Eiszeit auf Fauna u. Flora. Ersteigung d. Gargaros. Das Expansionsgetz. Negersitten. Zur Urgeschichte von Hellas u. Italien. Die älteste fossile Flora d. arktischen Zone. Zur Geschichte d. Vogelliebhaberei. Der grosse ägyptische Mumienfund. Das Magazinieren von Elektrizität. Die Stellung d. Naturvölker in d. Menschheit. Politisch- u. Wirtschafts-geografische Rückblicke auf d. Jahr 1881. Dr. Felkien über Emin Bey (Dr. Schnitzler). Prof. Eduard Richter, Blauzeisgletscher am Hochkalter bei Berchtesgaden. Dr. Max Buch, Wochenbett u. Kindererziehung bei den Wotjaken. Novara-Reminszenzen. Emin Bei über d. Zustand d. Seriben-Wirtschaft in d. Rohlprovinz (Obere Nilregion). Einige Bemerkgn. über zwei bei uns vernachlässigte Schwestersprachen. Ein Hochzeitsfest d. Halbbeduinen im Ostjordanlande. Neue Wandkarte d. Alpen. Vorschlag zu einer Luta-Nzige-Expedition. Die Brahmanen in Hinterindien. Reise d. Mr. Jones in östlichen Zentral-Australien. Der Plan d. dänischen Polar-expedition unter Leutnant A. Hovgaard. Aus d. Berichte d. Grafen Waldburg-Zeil über die Reise d. Dampfers „Luise“ von d. Weser nach d. Jennissej. Englische Heuchelei in der Frage d. Haussklaven. Der gegenwärtige Stand der deutschen Afrikaforschung. Tiaguanaco. Sir Charles Lyells Leben. Die turkestanische Eisenbahn. Habenicht über rezente Veränderungen d. Erdoberfläche. Die historische Entwicklung Mexikos. Ein Beitrag zur Frage über die Orientirung d. wandernden Vögel. Die Schädel d. Ainos. Die thessalische Seen. Dr. Junker und Cassati im Lande der Monbuttu. Matteuccis u. Mattaris Reise quer durch Afrika. Anthropogeographie. Schneeberge auf Neu-Guinea. Instruktion d. „Hope“. Erste Nachrichten von „Wilhelm Barents“. Studien über thiergeographische und verwandte Erscheinungen. Aus d. Sierra Nevada. Das alte Hermundurenland. Dr. Emil Holubs Reiseplan. Eine verschollene hellenische Kolonie. Reise u. Rettung d. „Eira“. Vergleichende Studien über das europäische Bauernleben. Der normännische Ruf „Haro“. Zwei Todesfälle, Begebenheit aus dem ossetischen Dorfleben jüngster Zeit. Reisebriefe aus d. südwestl. Nordamerika. Reise u. Rettung d. „Eira“. Beiträge zur allgm. Orographie. 11.



$$(\pm \alpha \sqrt{-A}) (\pm \beta \sqrt{-A}) = \alpha \beta (-A). \quad (5)$$

$$(a \pm \alpha \sqrt{-A}) (a \mp \alpha \sqrt{-A}) = a^2 + \alpha^2 A. \quad (6)$$

$$(\pm \alpha \sqrt{-A}) : (\pm \beta \sqrt{-A}) = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (7)$$

$$\pm \alpha (\sqrt{-A})^{2n+1} : \pm \beta \sqrt{-A} = \frac{\alpha}{\beta} (-A)^n. \quad (8)$$

Som bekjendt er

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \frac{x^6}{2.3.4.5.6} \text{ etc.}$$

Sættes i denne Ligning  $x \sqrt{-1}$  i Stedet for  $x$ , udkommer ifølge § 5, (e) og (f)

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} \text{ etc.}$$

Sætter man i samme Ligning  $-x\sqrt{-1}$  i Stedet for  $x$ , udkommer

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5} + \frac{x^6}{2.3.4.5.6} \text{ etc.}$$

altsaa

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} \text{ etc.} = \cos x. \quad (9)$$

og

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} \text{ etc.} = \sin x. \quad (10)$$

Mellem Ligningerne i § 6 og § 7 er der ingen anden Forskjel, end at de i § 6 ere imaginære, medens de i § 7 ere reelle.  $\sqrt{-1}$ , substitueret i Stedet for  $\sqrt{-A}$ , giver det samme Resultat, som  $\sqrt{-1}$ , og  $\sqrt{-A}$  sat i Stedet for  $\sqrt{-A}$ , giver det samme Resultat som  $\sqrt{-A}$ .

## § 8.

## Ligningen

$$a + b \sqrt{-1} = \alpha + \beta \sqrt{-1} \quad (1)$$

tjener som Grundlag for en Hovedsats vedkommende de imaginære Størrelser. Denne Ligning forudsætter for det første, at Noget lader sig multiplicere med Intet, nemlig  $b$  med  $\sqrt{-1}$  og  $\beta$  med  $\sqrt{-1}$ . Thi  $\sqrt{-1}$  er jo et Udtryk for en Rod, en Størrelse, som ikke er til, altsaa et Udtryk for et Non-ens eller Intet. Hvert af de simulerede Produkter  $b \sqrt{-1}$  og  $\beta \sqrt{-1}$  er altsaa jevngodt med Intet. Derhos forudsætter Ligningen, at til Noget lader sig addere Intet, hvilken Forudsætning ligger til Grund for Udtrykkene  $a + b \sqrt{-1}$  og  $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ . Endelig forudsætter Ligningen, at Ligestorhed er tænkelig mellem  $a + b \sqrt{-1}$  og  $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ . Paa den saaledes funderede Ligning bygges den vigtige Slutning, at

$$a = \alpha,$$

$$b \sqrt{-1} = \beta \sqrt{-1},$$

og at naar man dividerer Fantomerne  $b \sqrt{-1}$  og  $\beta \sqrt{-1}$  med Fantomet  $\sqrt{-1}$ , saa udkommer

$$b = \beta.$$

Sætter man  $\overline{-1}$  i Stedet for  $\sqrt{-1}$  i Ligningen (1), udkommer

$$a + b \overline{-1} = \alpha + \beta \overline{-1}, \quad (2)$$

hvorpaa man ligeledes kan bygge Slutningen, at

$$a = \alpha,$$

$$b = \beta.$$

Thi da  $\overline{-1}$  har samme Adkomst til at betyde (+1) som (-1), saa har man

$$a + b (1) = \alpha + \beta (1),$$

og

$$a + b(-1) = \alpha + \beta(-1),$$

altsaa

$$2a = 2\alpha,$$

og

$$a = \alpha.$$

Fremdeles

$$2b = 2\beta,$$

altsaa

$$b = \beta.$$

## § 9.

Hvad Cauchy i sin cours d'analyse de l'école royale polytechnique, 1<sup>re</sup> partie, chap. VII, § 2<sup>e</sup> \*), hvortil henvises, lærer om imaginære Udtryk, gjøres i denne § gjældende om de dobbeltydige Størrelser, som fremkomme, naar man i bemeldte Udtryk sætter tegnet  $\sqrt{-1}$  i Stedet for  $\sqrt{-}$ .

En mærkelig Egenskab hos ethvert imaginært Udtryk af Formen  $\alpha + \varepsilon \sqrt{-1}$ , siger Cauchy pag. 182, er, at det lader sig bringe under Formen

$$\rho (\cos. \vartheta + \sqrt{-1} \sin. \vartheta),$$

hvor  $\rho$  betegner en positiv Størrelse og  $\vartheta$  en Cirkelbue. Den dobbeltydige Størrelse,  $\alpha + \varepsilon \sqrt{-1}$ , lader sig, under samme Forudsætning betræffende  $\rho$  og  $\vartheta$ , bringe under Formen  $\rho (\cos. \vartheta + \sqrt{-1} \sin. \vartheta)$ , altsaa

$$\alpha + \varepsilon \sqrt{-1} = \rho (\cos. \vartheta + \sqrt{-1} \sin. \vartheta). \quad (1)$$

Thi

$$\alpha + \varepsilon \sqrt{-1} = \varepsilon \left( \frac{\alpha}{\varepsilon} + \sqrt{-1} \right),$$

og  $\frac{\cos x}{\sin x}$  er positiv og aftager kontinuerlig fra  $\infty$  til 0, medens

\*) De l'imprimerie royale 1821.

Buen,  $\alpha$ , voxer fra 0 til  $\frac{\pi}{2}$ . Der maa altsaa gives en

Bue,  $\alpha$ , af en saadan Værdi, at  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\alpha}{\mathcal{Z}}$ . Denne Værdi være  $\mathcal{S}$ , altsaa

$$\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1} = \mathcal{Z} \left( \frac{\cos \mathcal{S}}{\sin \mathcal{S}} + \sqrt{-1} \right).$$

Men

$$\mathcal{Z} \left( \frac{\cos \mathcal{S}}{\sin \mathcal{S}} + \sqrt{-1} \right) = \frac{\mathcal{Z}}{\sin \mathcal{S}} (\cos \mathcal{S} + \sqrt{-1} \sin \mathcal{S}),$$

Altsaa

$$\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1} = \frac{\mathcal{Z}}{\sin \mathcal{S}} (\cos \mathcal{S} + \sqrt{-1} \sin \mathcal{S}),$$

og naar man sætter

$$\frac{\mathcal{Z}}{\sin \mathcal{S}} = \rho,$$

$$\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1} = \rho (\cos \mathcal{S} + \sqrt{-1} \sin \mathcal{S}).$$

Ifølge § 8, (2) er i denne Ligning

$$\alpha = \rho \cos \mathcal{S}, \quad (2)$$

$$\mathcal{Z} = \rho \sin \mathcal{S}, \quad (3)$$

altsaa

$$\alpha^2 + \mathcal{Z}^2 = \rho^2 (\cos^2 \mathcal{S} + \sin^2 \mathcal{S}) = \rho^2.$$

eller

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \alpha^2 + \mathcal{Z}^2, \\ \rho &= \sqrt{\alpha^2 + \mathcal{Z}^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

og

$$\cos \mathcal{S} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \mathcal{Z}^2}}, \quad (5)$$

og

$$\sin \mathcal{S} = \frac{\mathcal{Z}}{\sqrt{\alpha^2 + \mathcal{Z}^2}}. \quad (6)$$

Man kan sætte

$$- \alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1} = \rho (\cos \mathcal{S}_1 + \sqrt{-1} \sin \mathcal{S}_1), \quad (7)$$

hvor  $\rho$  er positiv og  $\vartheta_1$  en Cirkelbue.

Thi

$$-\alpha + \varrho \sqrt{-1} = \varrho \left( \frac{-\alpha}{\varrho} + \sqrt{-1} \right),$$

og  $\frac{\cos x}{\sin x}$  er negativ og tiltager kontinuerlig fra 0 til  $-\infty$ ,

medens Buen,  $x$ , voxer fra  $\frac{\pi}{2}$  til  $\pi$ . Der gives altsaa en saadant værdi af  $x$ , at

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\alpha}{\varrho}.$$

Denne Værdi være  $\vartheta_1$ , altsaa

$$\frac{\cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_1} = \frac{-\alpha}{\varrho},$$

og

$$-\alpha + \varrho \sqrt{-1} = \varrho \left( \frac{\cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_1} + \sqrt{-1} \right).$$

Men

$$\varrho \left( \frac{\cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_1} + \sqrt{-1} \right) = \frac{\varrho}{\sin \vartheta_1} (\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1),$$

altsaa

$$-\alpha + \varrho \sqrt{-1} = \frac{\varrho}{\sin \vartheta_1} (\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1),$$

og, naar man sætter

$$\frac{\varrho}{\sin \vartheta_1} = \rho,$$

$$-\alpha + \varrho \sqrt{-1} = \rho (\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1).$$

Ifølge § 8, (2) er i denne Ligning

$$-\alpha = \rho \cos \vartheta_1,$$

hvor  $\cos \vartheta_1$  maa være negativ, da  $\rho$  forudsættes at være positiv, altsaa

$$\alpha = \rho (-\cos \vartheta_1). \quad (8)$$



Ifølge § 8, (2) er

$$\mathcal{Z} = \rho (\sin \mathcal{S}_1), \quad (9)$$

altsaa

$$\alpha^2 + \mathcal{Z}^2 = \rho^2 [(-\cos \mathcal{S}_1)^2 + \sin^2 \mathcal{S}],$$

eller

$$\rho^2 = \alpha^2 + \mathcal{Z}^2,$$

altsaa

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \mathcal{Z}^2}, \quad (10)$$

og

$$\cos \mathcal{S}_1 = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \mathcal{Z}^2}}, \quad (11)$$

og

$$\sin \mathcal{S}_1 = \frac{\mathcal{Z}}{\sqrt{\alpha^2 + \mathcal{Z}^2}}. \quad (12)$$

Overensstemmende med Terminologien i Læren om de imaginære Størrelser kan man kalde  $\rho$  i Ligningen (1) Modulus til  $(\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})$ , og  $(\cos \mathcal{S} + \sqrt{-1} \sin \mathcal{S})$  sammens reducerede Udtryk, ligeledes  $\rho$  i Ligningen (7) Modulus til  $(-\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})$  og  $\cos \mathcal{S}_1 + \sqrt{-1} \sin \mathcal{S}_1$  sammens reducerede Udtryk. Fremdeles kan man kalde  $(\pm \alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})$  og  $(\pm \alpha - \mathcal{Z} \sqrt{-1})$  konjugerede dobbelttydige Størrelser. Derhos kan man sige, at en dobbelttydig Størrelse og en imaginær Størrelse svare mod hinanden, naar Forskjellen mellem dem kun bestaar deri, at den ene har  $\sqrt{-1}$ , hvor den anden har  $\sqrt{1}$ .

Operationerne med dobbelttydige Størrelser lade sig, ligesom Operationerne med imaginære Størrelser, simplificere ved Hjælp af deres reducerede Udtryk, hvis væsentligste Egenskaber fremgaar af følgende Læsesætninger.

*1ste Læresætning. Naar*

$$\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1} = \alpha_1 + \mathcal{Z}_1 \sqrt{-1}, \quad (A)$$

*saa er Modulus til  $(\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})$  lig Modulus til  $(\alpha_1 + \mathcal{Z}_1 \sqrt{-1})$  og*

det reducerede Udtryk til  $(\alpha + \zeta \sqrt{-1})$  er lig det reducerede Udtryk til  $(\alpha_1 + \zeta_1 \sqrt{-1})$ .

Bevis. Man kan sætte

$$\alpha + \zeta \sqrt{-1} = \rho (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta),$$

$$\alpha_1 + \zeta_1 \sqrt{-1} = \rho_1 (\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1),$$

altsaa

$$\rho (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta) = \rho_1 (\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1).$$

Men

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \zeta^2}, \quad (4), (10)$$

og

$$\rho_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \zeta_1^2}.$$

Men ifølge § 8, (2) er i Ligningen (A)  $\alpha = \alpha_1$  og  $\zeta = \zeta_1$ , altsaa

$$\rho = \rho_1 \quad (13)$$

altsaa ogsaa

$$\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta = \cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1. \quad (14)$$

Ligesom to ligestore konjugerede imaginære Udtryk have den samme Modulus, saaledes have ogsaa to ligestore konjugerede dobbelttydige Udtryk den samme Modulus. Og ligesom Produktet af to ligestore konjugerede imaginære Udtryk er = Kvadratet af deres fælles Modulus, saaledes er ogsaa Produktet af to ligestore konjugerede dobbelttydige Udtryk = Kvadratet af deres fælles Modulus.

Sætter man  $\zeta = 0$  i Ligningen (1), saa reduceres dennes første Del til  $\alpha$ , hvoraf følger at

$$\rho = \alpha, \quad (4)$$

$$\cos \vartheta = 1, \quad (5)$$

$$\sin \vartheta = 0, \quad (6)$$

altsaa

$$\vartheta = \pm 2k\pi, \quad (15)$$

hvor  $k$  er = 0, eller hvilket som helst helt Tal.

Sætter man  $\mathcal{Z} = 0$  i Ligningen (7), saa reduceres dennes første Del til  $(-\alpha)$ , hvorved følger at

$$\rho = \alpha, \quad (10)$$

$$\cos \mathcal{S}_1 = -1, \quad (11)$$

$$\sin \mathcal{S}_1 = 0, \quad (12)$$

altsaa

$$\mathcal{S}_1 = \pm (2k+1)\pi, \quad (16)$$

hvor  $k$  er  $= 0$  eller hvilket som helst helt Tal.

Altsaa naar  $\mathcal{Z} = 0$ , reduceres Ligningen (1) til

$$\alpha = \alpha [\cos (\pm 2k\pi) + \sqrt{-1} \sin (\pm 2k\pi)], \quad (17)$$

hvorimod Ligningen (7) reduceres til

$$-\alpha = \alpha [\cos (\pm 2k \pm 1)\pi + \sqrt{-1} \sin (\pm 2k \pm 1)\pi]. \quad (18)$$

Modulus af Størrelsen  $\alpha$  kommer saaledes ud paa det samme som den numeriske Værdi af  $\alpha$ , medens det til  $\alpha$  hørende reducerede Udtryk bliver

$$+1, \text{ som er } = \cos (\pm 2k\pi) + \sqrt{-1} \sin (\pm 2k\pi), \quad (19)$$

hvorimod det til  $(-\alpha)$  hørende reducerede Udtryk bliver.

$$-1, \text{ som er } = \cos (\pm 2k \pm 1)\pi + \sqrt{-1} \sin (\pm 2k \pm 1)\pi. \quad (20)$$

Sætter man  $\rho = 0$  i Ligningen (1) saa forsvinde begge dens Dele. En dobbelttydig Størrelse er  $= 0$ , naar dens Modulus er  $= 0$ , ligesom den imaginære Størrelse er  $= 0$ , naar dens Modulus er  $= 0$ , og da cosinus og sinus til en Cirkelbue ikke samtidig forsvinder, saa kan den dobbelttydige Størrelse, ligesaa lidt som den imaginære Størrelse, forsvinde, medmindre dens Modulus bliver  $= 0$ .

Sættes  $\rho = 1$  i Ligningen (1), saa bliver

$$\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1} = \cos \mathcal{S} + \sqrt{-1} \sin \mathcal{S}.$$

Altsaa, naar den dobbelttydige Størrelses Modulus gaar

over til 1, saa gaar selve Størrelsen over til sit reducerede Udtryk.

*2den Læresætning. Til at multiplicere to reducerede Udtryk  $\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta$  og  $\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1$  med hinanden, behøves kun at man adderer deres Buer.*

Bevis.

$$\begin{aligned} (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)(\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1) &= \cos \vartheta \cdot \cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1 \cos \vartheta \\ &+ \sqrt{-1} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta_1 - \sin \vartheta \cdot \sin \vartheta_1 \\ &= \cos(\vartheta + \vartheta_1) + \sqrt{-1} \sin(\vartheta + \vartheta_1). \end{aligned} \quad (21)$$

Tillæg. Sætter man  $\vartheta_1 = -\vartheta$ , udkommer

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)(\cos \vartheta - \sqrt{-1} \sin \vartheta) = 1. \quad (22)$$

*3die Læresætning. Til at multiplicere med hinanden flere reducerede Udtryk.*

$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)(\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1)(\cos \vartheta_{11} + \sqrt{-1} \sin \vartheta_{11})$  o.s.v. behøves kun at addere Buerne.

Bevis.

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)(\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1) = \cos(\vartheta + \vartheta_1) + \sqrt{-1} (\sin \vartheta + \sin \vartheta_1)$$

altsaa

$$\begin{aligned} &(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)(\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1)(\cos \vartheta_{11} + \sqrt{-1} \sin \vartheta_{11}) = \\ &[\cos(\vartheta + \vartheta_1) + \sqrt{-1} \sin(\vartheta + \vartheta_1)](\cos \vartheta_{11} + \sqrt{-1} \sin \vartheta_{11}) = \\ &\cos(\vartheta + \vartheta_1 + \vartheta_{11}) + \sqrt{-1} \sin(\vartheta + \vartheta_1 + \vartheta_{11}). \end{aligned} \quad (23)$$

Paa samme Maade lader sig bevise, at

$$\begin{aligned} &(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)(\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1)(\cos \vartheta_{11} + \sqrt{-1} \sin \vartheta_{11}) \\ &(\cos \vartheta_{111} + \sqrt{-1} \sin \vartheta_{111}) \dots \dots \dots \\ &= \cos(\vartheta + \vartheta_1 + \vartheta_{11} + \vartheta_{111} + \dots) + \sqrt{-1} \sin(\vartheta + \vartheta_1 + \vartheta_{11} + \vartheta_{111} + \dots) \end{aligned} \quad (24)$$

4de Læresætning. Til at dividere det reducerede Udtryk,  $(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)$ , med det reducerede Do.,  $(\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1)$ , behøves kun at subtrahere  $\vartheta_1$  fra  $\vartheta$ .

Bevis.

$$\frac{\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1} \text{ være } = x$$

altsaa

$$\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta = x (\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1)$$

altsaa

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta) (\cos \vartheta_1 - \sqrt{-1} \sin \vartheta_1) =$$

$$x (\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1) (\cos \vartheta_1 - \sqrt{-1} \sin \vartheta_1) = x (\cos^2 \vartheta_1 + \sin^2 \vartheta_1) = x$$

altsaa

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta) (\cos \vartheta_1 - \sqrt{-1} \sin \vartheta_1) = x,$$

og

$$\begin{aligned} \frac{\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1} &= (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta) (\cos \vartheta_1 - \sqrt{-1} \sin \vartheta_1) \\ &= \cos (\vartheta - \vartheta_1) + \sqrt{-1} \sin (\vartheta - \vartheta_1) \end{aligned} \quad (25)$$

Tillæg. Sættes i Ligningen (25)  $\vartheta = 0$ , udkommer

$$\frac{1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1} = \cos \vartheta_1 - \sqrt{-1} \sin \vartheta_1 \quad (26)$$

5te Læresætning. Til at ophøie det dobbelttydige Udtryk

$$\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta$$

til en Potents af Graden  $m$  ( $m$  være hvilket som helst helt Tal) behøves kun at multiplicere Bøen i bemeldte Udtryk med  $m$ .

Beviset for at

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m = \cos m\vartheta + \sqrt{-1} \sin m\vartheta \quad (27)$$

ligger i Ligningerne (23) og (24), hvor man kan sætte

$$\vartheta = \vartheta_1 = \vartheta_{11} = \vartheta_{111} \text{ o.s.v.}$$

Tillæg. Sætter man i Ligningen (27)  $(-\vartheta)$  i Stedet for  $\vartheta$ , udkommer



$$(\cos \vartheta - \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m = \cos m \vartheta - \sqrt{-1} \sin m \vartheta. \quad (28)$$

Udvikler man  $(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m$  og  $(\cos \vartheta - \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m$  efter Newtons Binominalformel, saa finder man at

$$\begin{aligned} & (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m + (\cos \vartheta - \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m = \\ & 2 \left[ \cos^m \vartheta - \frac{m(m-1)}{2} \cos^{m-2} \vartheta \sin^2 \vartheta + \right. \\ & \left. \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{m-4} \vartheta \sin^4 \vartheta \text{ etc.} \right]. \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} & (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m - (\cos \vartheta - \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m = \\ & 2 \sqrt{-1} \left[ m \cos^{m-1} \vartheta \sin \vartheta - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} \cos^{m-3} \vartheta \sin^3 \vartheta \text{ etc.} \right]. \end{aligned}$$

Men

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m + (\cos \vartheta - \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m = 2 \cos m \vartheta, \quad (27) \text{ og } (28)$$

og

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m - (\cos \vartheta - \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m = 2 \sqrt{-1} \sin m \vartheta, \\ \text{altsaa}$$

$$\begin{aligned} \cos m \vartheta &= \cos^m \vartheta - \frac{m(m-1)}{2} \cos^{m-2} \vartheta \sin^2 \vartheta + \\ & \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{m-4} \vartheta \sin^4 \vartheta \text{ etc.} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\sin m \vartheta = m \cos^{m-1} \vartheta \sin \vartheta - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} \cos^{m-3} \vartheta \sin^3 \vartheta \text{ etc.} \quad (30)$$

Sættes f. Ex.  $m = 2$  i (29) og (30), udkommer

$$\cos 2 \vartheta = \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta,$$

$$\sin 2 \vartheta = 2 \cos \vartheta \sin \vartheta.$$

Sættes  $m = 3$  udkommer

$$\cos 3 \vartheta = \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta,$$

$$\sin 3 \vartheta = 3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - \sin^3 \vartheta.$$

6te Læresætning. Til at ophøie det dobbelttydige Udtryk

$$\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta,$$

til en Potents af Graden  $(-m)$ , ( $m$  være hvilket som helst helt Tal), behøves kun at multiplicere Buen i bemeldte Udtryk med  $(-m)$ , hvilket vil sige, at

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^{-m} = \cos (-m\vartheta) + \sqrt{-1} \sin (-m\vartheta). \quad (31)$$

Bevis.

$$\begin{aligned} (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^{-m} &= \frac{1}{(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m} = (\cos \vartheta - \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m, \quad (26) \\ &= \cos m\vartheta - \sqrt{-1} \sin m\vartheta = \cos (-m\vartheta) + \sqrt{-1} \sin (-m\vartheta). \end{aligned}$$

7de Læsesætning. Til at finde Produktet af to eller flere dobbelttydige Udtryk behøves kun at multiplicere Produktet af Moduluserne med Produktet af de reducerede Udtryk, hvilket vil sige, at

$$\begin{aligned} \rho (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta) \rho_1 (\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1) \rho_{11} (\cos \vartheta_{11} + \sqrt{-1} \sin \vartheta_{11}) \dots \\ = \rho \rho_1 \rho_{11} \dots [\cos (\vartheta + \vartheta_1 + \vartheta_{11} \dots) + \sqrt{-1} \sin (\vartheta + \vartheta_1 + \vartheta_{11} \dots)]. \quad (32) \end{aligned}$$

Beviset herfor ligger i (24), samt deri, at Produktet forbliver det samme, om Faktorernes Orden forandres.

Tillæg. Produktet af flere dobbelttydige Udtryk er et nyt dobbelttydigt Udtryk, hvis Modulus er lig Produktet af Faktorernes Moduluser.

Tillæg. Da et dobbelttydigt Udtryk ikke kan forsvinde, medmindre dets Modulus forsvinder, og da Produktet af flere Moduluser ikke kan forsvinde, medmindre idetmindste en af dem bliver  $= 0$ , saa kan man i Henhold til 7de Læresætning sige:

Produktet af to eller flere dobbelttydige Udtryk kan ikke forvinde, medmindre et af dem bliver  $= 0$ .

8de Læresætning. Til at finde to dobbelttydige Storrelseres Kvotient behøves kun at multiplicere Kvotienten af de redu-

cerede Udtryk med Kvotienten af Moduluserne, hvilket vil sige, at

$$\frac{\rho (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)}{\rho_1 (\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1)} = \frac{\rho}{\rho_1} [\cos (\vartheta - \vartheta_1) + \sqrt{-1} \sin (\vartheta - \vartheta_1)]. \quad (33)$$

Beviset herfor ligger i Ligningen (25).

Tillæg. Sættes  $\vartheta = 0$  i Ligningen (33), udkommer

$$\frac{1}{\rho_1 (\cos \vartheta_1 + \sqrt{-1} \sin \vartheta_1)} = \frac{1}{\rho_1} (\cos \vartheta_1 - \sqrt{-1} \sin \vartheta_1). \quad (26) \quad (34)$$

*9de Læresætning.* Til at finde  $m^{\text{te}}$  Potents af et dobbelttydigt Udtryk ( $m$  være hvilket som helst helt Tal) behøves kun at multiplicere  $m^{\text{te}}$  Potents af det respektive reducerede Udtryk med  $m^{\text{te}}$  Potents af Modulus, eller

$$[\rho (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)]^m = \rho^m (\cos m \vartheta + \sqrt{-1} \sin m \vartheta). \quad (35)$$

Bevis.

$$\begin{aligned} [\rho \cos \vartheta + \sqrt{-1} \rho \sin \vartheta]^m &= \rho^m (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m \\ &= \rho^m (\cos m \vartheta + \sqrt{-1} \sin m \vartheta). \end{aligned}$$

*10de Læresætning.* Til at ophøie et dobbelttydigt Udtryk til  $(-m)^{\text{te}}$  Potents ( $m$  være hvilket som helst helt Tal) udfordres kun at ophøie det respektive reducerede Udtryk til  $(-m)^{\text{te}}$  Potents, samt Modulusen til  $(-m)^{\text{te}}$  Potents og derpaa multiplicere disse Potentser med hinanden, eller

$$[\rho (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)]^{-m} = \rho^{-m} (\cos m \vartheta - \sqrt{-1} \sin m \vartheta). \quad (36)$$

Bevis.

$$\begin{aligned} [\rho (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)]^{-m} &= \frac{1}{[\rho (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)]^m} \\ &= \left[ \frac{1}{\rho (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)} \right]^m = \rho^{-m} (\cos m \vartheta - \sqrt{-1} \sin m \vartheta). \quad (26) \end{aligned}$$

Det er saaledes Punkt for Punkt blevet paavist, at forsaavidt betræffer § 2 i Kapitel 7 af Cauchy's Cours d'analyse,

saa kan Tegnet,  $\sqrt{\quad}$ , overalt træde i Stedet for Tegnet,  $\sqrt{\quad}$ , eller med andre Ord: Alternationsroden,  $\sqrt{-1}$ , kan overtage den Rolle, som man har tildelt den imaginære Kvadratrod,  $\sqrt{-1}$ .

### § 10.

I § 3, Kapitel 7 af Cauchy's Cours d'analyse, hvortil henvises, omhandles Opgaver, der gaa ud paa at finde Værdierne af  $((1))^{\frac{1}{n}}$ ,  $((1))^{\frac{m}{n}}$ ,  $((1))^{\frac{m}{n}}$ ,  $((-1))^{\frac{1}{n}}$ ,  $((-1))^{\frac{m}{n}}$ ,  $((-1))^{\frac{m}{n}}$  hvor  $m$  og  $n$  ere hele Tal og indbyrdes Primtal.

I den foreliggende § paavises, at ved Løsningen af disse Opgaver gjør Alternationsroden,  $\sqrt{-1}$  den samme Tjeneste, som den imaginære Kvadratrod,  $\sqrt{-1}$ .

*1ste Opgave. At finde Værdierne af  $((1))^{\frac{1}{n}}$  o: enhver Størrelse, som, ophøiet til  $n^{\text{te}}$  Potents, er = 1.*

Ifølge Læren om de imaginære Størrelser findes disse Værdier ved i Ligningen,

$$((1))^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad (1)$$

at give  $k$ , som ikke kan være Brøk, Værdierne:  $0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ , naar  $n$  er et lig Tal, og Værdierne:  $0, 1, 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}$ , naar  $n$  er et ulige Tal. Som Bevis for at Værdierne af  $((1))^{\frac{1}{n}}$  findes paa denne Maade fremhæves, at

$$\left( \cos \frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^n = 1. \quad (a)$$

Værdierne af  $((1))^{\frac{1}{n}}$  findes ogsaa ved i Ligningen,

$$((1))^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad (1_1)$$

at give  $k$  de samme Værdier, som i Ligningen (1). Hvis disse Værdier skulle kunne findes paa denne Maade, saa maa

$$\left(\cos \frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{n}\right)^n = 1. \quad (a_1)$$

I Betragtning af at  $\cos \frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{n}$  lader sig fremstille under Formen  $\alpha \pm \varepsilon \sqrt{-1}$  og  $\cos \frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{n}$  under Formen  $\alpha \pm \varepsilon \sqrt{-1}$ , kan man med Henviſning til § 4, (15) og § 5, (15) ſige, at naar

$$\left(\cos \frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{n}\right)^n = 1,$$

saa er ogsaa

$$\left(\cos \frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{n}\right)^n = 1.$$

Herved er godtgjort, at man kan udlede Værdierne af  $((1))^{\frac{1}{n}}$  paa samme Maade af Ligningen  $(1_1)$  som af Ligningen (1).

Exempler: Sættes i Ligningen  $(1_1)$   $n = 2$ , udkommer for  $k = 0$ ,  $((1))^{\frac{1}{2}} = \cos 0 \pm \sqrt{-1} \sin 0 = 1$ .

„  $k = 1$ ,  $((1))^{\frac{1}{2}} = \cos \pi \pm \sqrt{-1} \sin \pi = -1$ .

Sættes i Ligningen  $(1_1)$   $n = 4$ , udkommer for  $k = 0$ ,  $((1))^{\frac{1}{4}} = \cos 0 \pm \sqrt{-1} \sin 0 = 1$ .

„  $k = 1$ ,  $((1))^{\frac{1}{4}} = \cos \frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{2} = \pm \sqrt{-1}$ .

„  $k = 2$ ,  $((1))^{\frac{1}{4}} = \cos \pi \pm \sqrt{-1} \sin \pi = -1$ .

Sættes i Ligningen  $(1_1)$   $n = 3$ , udkommer for  $k = 0$ ,  $((1))^{\frac{1}{3}} = \cos 0 \pm \sqrt{-1} \sin 0 = 1$ .



for  $k = 1$ ,  $((1))^{\frac{1}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} \sqrt{-1}$ .

At enhver af de saaledes fundne Værdier, ophøiet til til den respektive Potents, er  $= 1$ , kan man overbevise sig om, ved at iværksætte Potentsationen.

*2den Opgave. At finde Værdierne af  $((1))^{\frac{m}{n}}$ , hvorved forstaaes  $m^{\text{te}}$  Potents af hver  $n^{\text{te}}$  Rod af 1.*

Læren om de imaginære Størrelser angiver, at disse Værdier fremgaa af Ligningen,

$$((1))^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m \cdot 2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{m \cdot 2k\pi}{n}, \quad (2)$$

naar man giver  $k$  de samme Værdier, som i Ligningen (1).

Værdierne af  $((1))^{\frac{m}{n}}$  fremgaar ogsaa af Ligningen

$$((1))^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m \cdot 2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{m \cdot 2k\pi}{n}, \quad (2_1)$$

naar man giver  $k$  de samme Værdier, som i Ligningen (1).

Thi

$$\begin{aligned} ((1))^{\frac{m}{n}} &= \left[ ((1))^{\frac{1}{n}} \right]^m = \left( \cos \frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^m \\ &= \cos \frac{m \cdot 2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{m \cdot 2k\pi}{n}, \quad \S 9, (27). \end{aligned}$$

*3die Opgave. At finde Værdierne af  $((1))^{\frac{-m}{n}}$ .*

Disse Værdier findes ved i Ligningen,

$$((1))^{\frac{-m}{n}} = \cos \frac{m \cdot 2k\pi}{n} \mp \sqrt{-1} \sin \frac{m \cdot 2k\pi}{n}, \quad (3)$$

at give  $k$  de samme Værdier, som i Ligningen (1). Værdierne

af  $((1))^{\frac{-m}{n}}$  fremgaar ogsaa af Ligningen,

$$((1))^{\frac{-m}{n}} = \cos \frac{m \cdot 2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{m \cdot 2k\pi}{n}, \quad (3_1)$$

naar man giver  $k$  de samme Værdier, som i Ligningen (1).  
Thi

$$\begin{aligned} ((1))^{\frac{-m}{n}} &= \frac{1}{((1))^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\cos \frac{m \cdot 2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{m \cdot 2k\pi}{n}} \\ &= \cos \frac{m \cdot 2k\pi}{n} \mp \sqrt{-1} \sin \frac{m \cdot 2k\pi}{n}. \quad \S 9 (26) \end{aligned}$$

*4de Opgave.* At finde Værdierne af  $((-1))^{\frac{1}{n}}$  eller hver Størrelse, hvis  $n^{\text{te}}$  Potents er  $-1$ .

Disse Værdier fremgaa ifølge Læren om de imaginære Størrelser af Ligningen,

$$((-1))^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}, \quad (4)$$

naar man giver  $k$  Værdierne:  $0, 1, 2, 3 \dots \frac{n-2}{2}$ , ifald  $n$  er et lige Tal, og Værdierne:  $0, 1, 2, 3 \dots \frac{n-1}{1}$ , hvis  $n$  er et ulige Tal. Værdierne af  $((-1))^{\frac{1}{n}}$  fremgaa ogsaa af Ligningen,

$$((-1))^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}, \quad (4_1)$$

naar man giver  $k$  de samme Værdier, som i Ligningen (4).  
Thi

$$\left( \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \right)^n = -1$$

altsaa ogsaa

$$\left( \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \right)^n = -1. \quad \S 4, (15) \text{ og } \S 5, (15)$$

Exempler: Sættes  $n = 2$  i Ligningen  $(4_1)$  udkommer for  $k = 0$ ,

$$((-1))^{\frac{1}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{2} = \pm \sqrt{-1}.$$

Sættes  $n = 4$  i Ligningen  $(4_1)$ , udkommer for  $k = 0$ ,

$$((-1))^{\frac{1}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \sqrt{-1}.$$

for  $k = 1$ ,

$$((-1))^{\frac{1}{4}} = \cos \frac{3\pi}{4} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{-1}{2^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \sqrt{-1}.$$

Sættes  $n = 3$  i Ligningen  $(4_1)$  udkommer for  $k = 0$ ,

$$((-1))^{\frac{1}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \pm \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} \sqrt{-1},$$

for  $k = 1$ ,

$$((-1))^{\frac{1}{3}} = \cos \pi \pm \sqrt{-1} \sin \pi = -1.$$

At enhver af disse Værdier, ophøiet til den respektive Potents, er  $= -1$ , kan man overbevise sig om ved at iværksætte Potentsationen.

*5te Opgave. At finde Værdierne af  $((-1))^{\frac{m}{n}}$ , af hvilke enhver er  $m^{\text{te}}$  Potents af  $n^{\text{te}}$  Rod af  $(-1)$ .*

Disse Værdier fremgaa af Ligningen,

$$((-1))^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{m(2k+1)\pi}{n}, \quad (5)$$

naar man giver  $k$  de samme Værdier, som i Ligningen  $(4)$ . Beviset for at bemeldte Værdier fremgaa paa denne Maade ligger deri, at

$$\left[ \cos \frac{m(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{m(2k+1)\pi}{n} \right]^n = -1. \quad (b)$$

Værdierne af  $((-1))^{\frac{m}{n}}$  fremgaa ogsaa af Ligningen,

$$((-1))^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{m(2k+1)\pi}{n}, \quad (5_1)$$

naar man giver  $k$  de samme Værdier, som i Ligningen (4). Thi naar Ligningen (b) finder Sted, saa er

$$\left[ \cos \frac{m(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{m(2k+1)\pi}{n} \right]^n = -1. \S 4, (15) \text{ og } \S 5, (15). (b_1)$$

3te Opgave, At finde Værdierne af  $((-1))^{\frac{-m}{n}}$ .

Disse Værdier findes ved i Ligningen,

$$((-1))^{\frac{-m}{n}} = \cos \frac{m(2k+1)\pi}{n} \mp \sqrt{-1} \sin \frac{m(2k+1)\pi}{n}, \quad (6)$$

at give  $k$  de samme Værdier, som i Ligningen (4).

Værdierne af  $((-1))^{\frac{-m}{n}}$  findes ogsaa ved i Ligningen,

$$((-1))^{\frac{-m}{n}} = \cos \frac{m(2k+1)\pi}{n} \mp \sqrt{-1} \sin \frac{m(2k+1)\pi}{n} \quad (6_1)$$

at give  $k$  de samme Værdier, som i Ligningen (4). Thi

$$\begin{aligned} ((-1))^{\frac{-m}{n}} &= \frac{1}{((-1))^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\cos \frac{m(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{m(2k+1)\pi}{n}} \\ &= \cos \frac{m(2k+1)\pi}{n} \mp \sqrt{-1} \sin \frac{m(2k+1)\pi}{n}. \S 9, (26) \end{aligned}$$

## § 11.

Med Henvisning til Cauchy's Cours d'analyse § 4, Cap. VII bemærkes, at Værdierne af  $((\alpha + \varepsilon \sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}}$ ,  $((\alpha + \varepsilon \sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}}$  og af  $((\alpha + \varepsilon \sqrt{-1}))^{\frac{-m}{n}}$ , hvor  $m$  og  $n$  ere hele Tal, samt indbyrdes Primtal, findes ved Hjælp af visse imaginære Udtryk. I den foreliggende § paavises, at naar man sætter

Tegnet  $\sqrt{\phantom{x}}$  i Stedet for  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  i disse imaginære Udtryk, saa udkomme Værdierne af  $((\alpha + \varrho \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}})$ ,  $((\alpha + \varrho \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}})$  og af  $((\alpha + \varrho \sqrt{-1})^{\frac{-m}{n}})$ .

*1ste Opgave.* At finde Værdierne af  $((\alpha + \varrho \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}})$  og  $((\alpha + \varrho \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}})$ .

Værdierne af  $((\alpha + \varrho \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}})$  fremgaa af Ligningen,

$$((\alpha + \varrho \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}) = \rho^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \left( \frac{\vartheta \pm 2k\pi}{n} \right) + \sqrt{-1} \sin \left( \frac{\vartheta \pm 2k\pi}{n} \right) \right], \quad (1)$$

naar man giver  $k$  Værdierne:  $0, 1, 2 \dots \frac{n}{2}$ , ifald  $n$  er et lige Tal, og Værdierne:  $0, 1, 2 \dots \frac{n-1}{2}$  naar  $n$  er et ulige Tal.

Værdierne af  $((\alpha + \varrho \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}})$  fremgaa af Ligningen,

$$((\alpha + \varrho \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}) = \rho^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \left( \frac{\vartheta \pm 2k\pi}{n} \right) + \sqrt{-1} \sin \left( \frac{\vartheta \pm 2k\pi}{n} \right) \right]. \quad (1_1)$$

Thi

$$\alpha + \varrho \sqrt{-1} = \rho (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta). \quad \S 9, (1)$$

Men

$$\rho (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta) = \rho [\cos (\vartheta \pm 2k\pi) + \sqrt{-1} (\vartheta \pm 2k\pi)],$$

altsaa

$$\alpha + \varrho \sqrt{-1} = \rho [\cos (\vartheta \pm 2k\pi) + \sqrt{-1} \sin (\vartheta \pm 2k\pi)] \quad (A)$$

Heraf lader sig slutte, at

$$((\alpha + \varrho \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}) = \rho^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \left( \frac{\vartheta \pm 2k\pi}{n} \right) + \sqrt{-1} \sin \left( \frac{\vartheta \pm 2k\pi}{n} \right) \right]. \quad (B)$$

Thi naar den anden Del af Ligningen (B) ophøies til  $n^{\text{te}}$  Potents, saa udkommer den anden Del af Ligningen (A), hvilken af de under Ligningen (1) omhandlede Værdier man har tildelt  $k$ .



Exempler:

Sættes  $n = 2$  i Ligningen  $(1_1)$ , udkommer

for  $k = 0$ ,

$$(\alpha + \varepsilon \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}} = \rho^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\vartheta}{2} + \sqrt{-1} \sin \frac{\vartheta}{2} \right).$$

for  $k = 1$ ,

$$(\alpha + \varepsilon \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}} = \rho^{\frac{1}{2}} \left[ \cos \left( \frac{\vartheta \pm 2\pi}{2} \right) + \sqrt{-1} \sin \left( \frac{\vartheta \pm 2\pi}{2} \right) \right] = \pm \rho^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\vartheta}{2} + \sqrt{-1} \sin \frac{\vartheta}{2} \right).$$

Sættes  $n = 3$  i Ligningen  $(1_1)$ , udkommer

for  $k = 0$ ,

$$(\alpha + \varepsilon \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = \rho^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{\vartheta}{3} + \sqrt{-1} \sin \frac{\vartheta}{3} \right),$$

for  $k = 1$ ,

$$(\alpha + \varepsilon \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = \rho^{\frac{1}{3}} \left[ \cos \left( \frac{\vartheta + 2\pi}{3} \right) + \sqrt{-1} \sin \left( \frac{\vartheta + 2\pi}{3} \right) \right],$$

for  $k = 1$ ,

$$(\alpha + \varepsilon \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = \rho^{\frac{1}{3}} \left[ \cos \left( \frac{\vartheta - 2\pi}{3} \right) + \sqrt{-1} \sin \left( \frac{\vartheta - 2\pi}{3} \right) \right].$$

2den Opgave. At finde Værdiene af  $((\alpha + \varepsilon \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}})^{\frac{m}{n}}$  og  $((\alpha + \varepsilon \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}})^{\frac{m}{n}}$ .

Værdierne af  $((\alpha + \varepsilon \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}})^{\frac{m}{n}}$  fremgaar af Ligningen,

$$((\alpha + \varepsilon \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}})^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}} \left[ \cos.m \left( \frac{\vartheta \pm 2k\pi}{n} \right) + \sqrt{-1} \sin.m \left( \frac{\vartheta \pm 2k\pi}{n} \right) \right], \quad (2)$$

naar man giver  $k$  de samme Værdier som i  $(1)$ .

Værdierne af  $((\alpha + \varepsilon \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}})^{\frac{m}{n}}$  fremgaar af Ligningen,

$$((\alpha + \varepsilon \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}})^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}} \left[ \cos.m \left( \frac{\vartheta \pm 2k\pi}{n} \right) + \sqrt{-1} \sin.m \left( \frac{\vartheta \pm 2k\pi}{n} \right) \right], \quad (2_1)$$

naar man giver  $k$  de samme Værdier som i Ligningen  $(1)$ .

Thi

$$\begin{aligned} ((\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}})^{\frac{1}{n}} &= \left[ ((\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}} \right]^m \\ &= \left( \rho^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \left( \frac{\mathcal{D} \pm 2k\pi}{n} \right) + \sqrt{-1} \sin \left( \frac{\mathcal{D} \pm 2k\pi}{n} \right) \right] \right)^m \\ &= \rho^{\frac{m}{n}} \left[ \cos.m \left( \frac{\mathcal{D} \pm 2k\pi}{n} \right) + \sqrt{-1} \sin.m \left( \frac{\mathcal{D} \pm 2k\pi}{n} \right) \right]. \end{aligned}$$

3die Opgave. At finde Værdierne af  $((\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})^{\frac{-m}{n}})^{\frac{-m}{n}}$  og  $((\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})^{\frac{-m}{n}})^{\frac{-m}{n}}$ .

Værdierne af  $((\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})^{\frac{-m}{n}})^{\frac{-m}{n}}$  findes ved i Ligningen,  
 $((\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})^{\frac{-m}{n}})^{\frac{-m}{n}} = \rho^{\frac{-m}{n}} \left[ \cos.m \left( \frac{\mathcal{D} \pm 2k\pi}{n} \right) - \sqrt{-1} \sin.m \left( \frac{\mathcal{D} \pm 2k\pi}{n} \right) \right] \quad (3)$   
 at give  $k$  de samme Værdier som i Ligningen (1).

Værdierne af  $((\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})^{\frac{-m}{n}})^{\frac{-m}{n}}$  fremgaar af Ligningen,  
 $((\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})^{\frac{-m}{n}})^{\frac{-m}{n}} = \rho^{\frac{-m}{n}} \left[ \cos.m \left( \frac{\mathcal{D} \pm 2k\pi}{n} \right) - \sqrt{-1} \sin.m \left( \frac{\mathcal{D} \pm 2k\pi}{n} \right) \right], \quad (3_1)$   
 naar man giver  $k$  de samme Værdier, som i Ligningen (1).

Thi

$$\begin{aligned} ((\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})^{\frac{-m}{n}})^{\frac{-m}{n}} &= \frac{1}{((\alpha + \mathcal{Z} \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}})^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\rho^{\frac{m}{n}} \left[ \cos.m \left( \frac{\mathcal{D} \pm 2k\pi}{n} \right) + \sqrt{-1} \sin.m \left( \frac{\mathcal{D} \pm 2k\pi}{n} \right) \right]} \\ &= \rho^{\frac{-m}{n}} \left[ \cos.m \left( \frac{\mathcal{D} \pm 2k\pi}{n} \right) - \sqrt{-1} \sin.m \left( \frac{\mathcal{D} \pm 2k\pi}{n} \right) \right]. \end{aligned}$$

## § 12.

I § 3, (3) og (4) er det paavist, at det er ligegyldigt, om en positiv Størrelse stilles under Tegnet,  $\sqrt{-}$ , eller under Tegnet,  $\sqrt{+}$ , eller, hvad der kommer ud paa det samme, at  $\sqrt{-}$  kan træde i Stedet for  $\sqrt{+}$ , naar den under  $\sqrt{+}$  staaende Størrelse er positiv. I de derpaa følgende Paragrafer er frem

hævet mange Exempler paa, at  $\sqrt{-}$  kan træde i Stedet for  $\sqrt{\phantom{x}}$  ogsaa da, naar den under  $\sqrt{-}$  staaende Størrelse er negativ, eller paa at en Størrelses Alternationsrod af anden Grad kan træde i Stedet for samme Størrelses imaginære Kvadratrod. Saaledes er paavist:

- a) i 4de og 5te § 18 Exempler paa, at bemeldte Alternationsrod funktionerer paa samme Maade, som den imaginære Kvadratrod.
- b) i 6te og 7de § 10 Exempler paa, at samme Alternationsrod gjør samme Tjeneste, som den imaginære Kvadratrod.
- c) i § 8 at den samme Slutning lader sig bygge paa Ligningen,

$$a + b \sqrt{-1} = \alpha + \beta \sqrt{-1},$$

som paa

$$a + b \sqrt{-1} = \alpha + \beta \sqrt{-1};$$

- d) i § 9 at 10 Læresætninger, som ifølge Læren om imaginære Størrelser gjælde om Udtrykket,  $\rho (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)$ , ogsaa gjælde om  $\rho (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)$ , og med det samme at  $\sqrt{-1}$  i 36 Ligninger, dels middelbart, dels umiddelbart spiller den samme Rolle, som  $\sqrt{-1}$ ;
- e) i 10de § 6 Exempler paa, at ved Løsning af Opgaver gjør  $\sqrt{-1}$  den samme Tjeneste, som  $\sqrt{-1}$ ;
- f) i 11te § 3 Exempler paa at  $\sqrt{-1}$  ved Løsning af Opgaver henholdsvis gjør samme Tjeneste, som  $\sqrt{-1}$ .

Disse fra Læren om de imaginære Størrelser hentede Exempler lade sig sammenstille i to Grupper, hvoraf den ene bestaar af Ligninger, hvis første Del er imaginær, den anden Del reel, hvorimod den anden Gruppe bestaar af Ligninger, hvori baade første og anden Del er imaginær. Sætter man  $\sqrt{-}$  i Stedet for  $\sqrt{\phantom{x}}$  i en Ligning, hørende til den første Gruppe, saa forbliver Ligningens reelle Del uforandret. Andengrads Alternationsrod fører saaledes til samme Resultat.

tat, som den imaginære Kvadratrod. Sætter man  $\sqrt{-1}$  i Stedet for  $\sqrt{-}$  i den første Del af en Ligning, hørende til den anden Gruppe, saa forbliver Ligningens anden Del uforandret paa det nær, at der kommer et  $\sqrt{-1}$  i Stedet for  $\sqrt{-}$ , hvilket vil sige, at, medens den imaginære Kvadratrod leverer en tom Form, afgiver andengrads Alternationsrod en reel Størrelse af samme Form. Saavidt ovenanførte Exempler række altsaa, kan man gjerne afskedige de imaginære Størrelser og sætte de dobbelttydige Do. i Stedet, eller egentligere: ombytte den imaginære Kvadratrod med andengrads Alternationsrod.

De Tilfælde, hvori andengrads Alternationsrod har vist sig skikket til at overtage den imaginære Kvadratrods algebraiske Rolle, ere saa mange (deres Antal kan lettelig forøges) og saa forskellige, at man vel derpaa kan bygge den Induktion, at den førstnævnte af disse Rødder i alle mødende Tilfælde vil gjøre Fyldest for den sidstnævnte.

I Forbindelse hermed bemærkes:  $\sqrt{-1}$  defineres ved Ligningen  $(\sqrt{-1})^2 = -1$ . Men ogsaa  $(\sqrt{-1})^2 = -1$ , altsaa  $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ . Heraf fremgaar, at Algorithmen for  $\sqrt{-1}$  maa være identisk med Algorithmen for  $\sqrt{-1}$  paa det nær, at den Første er fingeret, medens den Sidste er virkelig, o: Fantomet  $\sqrt{-1}$  har faaet Hævd paa at spille den Rolle, som udelukkende tilkommer  $\sqrt{-1}$ .

### § 13.

I Anmerkning til foranstaaende § 2 er yttret, at Tegnet,  $\sqrt{-}$ , ingensinde, undtagen i et enkelt Tilfælde, fører til nogen imaginær Størrelse og at det er den snævre Forstaaelse af Tegnet,  $\sqrt{-}$ , som avler disse Størrelser. Til Retfærdiggjørelse heraf og med Henvisning til § 3, Fig. (1), (2) og (3) i nedennævnte Afhandling\*) bemærkes:

\*) Hvorledes man undgaar imaginære Størrelser. Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Fjerde Bind. Andet Hefte.

Ligningene for Keglesnittene ere

$$\begin{aligned} y &= \pm \sqrt{px}, \\ y &= \pm \sqrt{a^2 - x^2}, \\ y &= \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \\ y &= \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \end{aligned} \tag{A}$$

Den første af disse Ligninger bliver imaginær, naar  $x$  slaar over i det Negative. Den anden og tredie Ligning bliver imaginær, naar  $\pm x$  bliver numerisk  $> a$ ; og den fjerde Ligning bliver imaginær, naar  $\pm x$  bliver numerisk  $< a$ . Enhver af disse Ligninger har saaledes sin Natside. Sætter man  $\sqrt{\quad}$  i Stedet for  $\sqrt{\quad}$  i disse Ligninger, saa udkommer i Ordenen

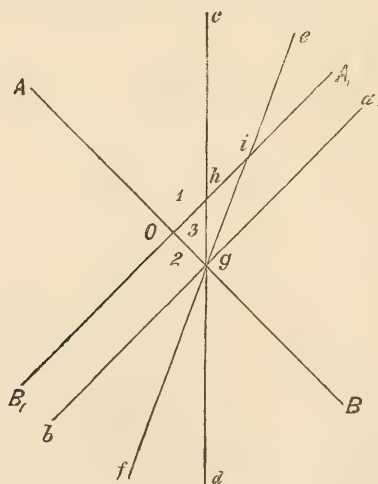
$$\begin{aligned} y &= \pm \sqrt{px}, \\ y &= \pm \sqrt{a^2 - x^2}, \\ y &= \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \\ y &= \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \end{aligned} \tag{B}$$

Ingen af Ligningerne (B) kan blive imaginær. Hvad disse Ligninger forestille, fremgaar af Fig. (1), (2) og (3) i den nævnte Afhandling. Her bemærkes kun, at Ligningerne (B) betegne henholdsvis det samme, som Ligningerne (A), saalænge den under  $\sqrt{\quad}$  staaende Størrelse er positiv. Ligningerne (B) ere saa langt fra det Imaginære, at det, som de forestille, ikke blot lader sig afbilde ved Tegning, men ogsaa forevise paa gjennemskaarne Kegler.

$AB$  og  $A_1B_1$  i nedenstaaende Figur være, i Papirets Plan liggende, rette Linier, som krydse hinanden under rette Vinkler;  $AOA_1$  være et Snit efter Axen i Keglen (1),  $A_1OB$



være et Snit efter Axen i Keglen (3) og  $B_1OB$  være et Snit efter Axen af Keglen (2).  $ab$ ,  $cd$  og  $ef$  være Planer lodrette paa Papirets Plan. Er  $ab$  parallel med  $A_1B_1$ , saa skjær den Keglerne (2) og (3) og Snittet bliver to fra hinanden vendte Parabler, svarende til Fig. (1) i forannævnte Afhandling. Er  $Oh = Og$ , saa skjær Planet,  $cd$ , Keglerne (2), (3), (1), og Snittet bliver i (2) en Gren af en ligesidet Hyperbel, i (3) en Cirkel og i (1) atter en Gren af en ligesidet Hyperbel — svarende til Fig. (2) i forannævnte Afhandling. Er  $Oi > Og$ , saa skjær Planet,  $ef$ , Keglerne (2), (3), (1), og Snittet bliver i (2) en Gren af en Hyperbel, i (3) en Ellipse, og (1) atter en Gren af en Hyperbel, svarende til Fig. (3) i samme Afhandling.



# Bedes bemærket.

Pag. 116 Linie 4 fra neden staar  $\pm a$ ) læs  $(\pm a)$

«	123	«	12	«	«	«	$\overline{A}$	«	$\overline{-A}$
«	134	«	7	«	oven	«	$\overline{\overline{\quad}}$	«	$\overline{\overline{\quad}}$
«	135	«	11	«	neden	«	ligestore	(udslettes)	
«	135	«	13	«	«	«	ligestore	do.	
«	135	«	14	«	«	«	ligestore	do.	
«	135	«	15	«	«	«	$\overline{\quad}$	for	$\overline{\quad}$



# Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden.

VON

SOPUS LIE.

---

Wird eine Fläche durch Translationsbewegung einer Curve  $c$  erzeugt, so durchlaufen die Punkte dieser Curve congruente und gleichgestellte Curven  $k$ , sodass die Fläche auch durch Translationsbewegung einer Curve  $k$  erzeugt werden kann. Die Curven  $c$  genügen einer Differentialrelation

$$\frac{dy_1}{dz_1} = f_1 \left( \frac{dx_1}{dz_1} \right),$$

und ebenso genügen die Curven  $k$  einer Relation

$$\frac{dy_2}{dz_2} = f_2 \left( \frac{dx_2}{dz_2} \right).$$

Setzen wir

---

\*) In mehreren früheren Arbeiten: Kurzes Resumé mehrerer neuer Theorien. Chr.a Gesells. d. W. 1872, Beiträge zur Theorie der Minimalflächen Math. Ann. Bd. XIV, 1878, Weitere Untersuchungen über Minimalflächen Archiv for Math. og Naturv. Bd. 4 u. s. w.) habe ich mich eingehend mit Flächen beschäftigt, die mehrere Erzeugungen durch Translation einer Curve gestatten.

$$\frac{dy_i}{dz_i} = \eta_i, \frac{dx_i}{dz_i} = \xi_i,$$

so erhalten unsere Relationen die Form

$$\eta_1 = f_1(\xi_1), \eta_2 = f_2(\xi_2)$$

und dabei ist  $f_2$  im Allgemeinen eine von  $f_1$  verschiedene Funktion. Die beiden Richtungen  $\eta_1 \xi_1$  und  $\eta_2 \xi_2$  liegen in jedem Punkte der Fläche harmonisch hinsichtlich der beiden durch denselben Punkt hindurchgehenden Haupttangenten, was durch die Gleichung

$$\xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \eta_1 \xi_2) s + \eta_1 \eta_2 t = 0$$

ausgedrückt wird.

Verlangen wir, dass unsere Fläche nicht allein durch Translation von  $c$  und  $k$  sondern zugleich durch Translationsbewegung einer dritten Curve  $c'$  und also gleichzeitig durch Translation einer vierten Curve  $k'$  erzeugt werden soll, so muss die betreffende Fläche zwei partielle Differentialgleichungen 2 O:

$$(1) \begin{cases} \xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) s + \eta_1 \eta_2 t = 0 \\ \xi_3 \xi_4 r + (\xi_3 \eta_4 + \xi_4 \eta_3) s + \eta_3 \eta_4 t = 0 \end{cases}$$

erfüllen. Dabei genügen die Curven  $c'$  und  $k'$  die Gleichungen

$$\eta_3 = f_3(\xi_3), \eta_4 = f_4(\xi_4)$$

wo

$$\frac{dy_3}{dz_3} = \eta_3, \frac{dx_3}{dz_3} = \xi_3, \frac{dy_4}{dz_4} = \eta_4, \frac{dx_4}{dz_4} = \xi_4$$

gesetzt ist. In den Gleichungen (1) sind die Grössen  $\xi_k$  und  $\eta_k$  Funktionen von  $p$  und  $q$ , deren analytischer Ausdruck durch Auflösung von den Relationen

$$p \xi_k + q \eta_k = 1, \eta_k = f_k(\xi_k)$$

gefunden wird. Hieraus folgt, dass zwei Gleichungen der Form (1) entweder gar keine oder auch  $\infty^4$  ähnliche und



gleichgestellte Integralfächen besitzen. Es fragt sich zunächst, welche Relationen zwischen den Grössen  $\xi_k \eta_k$  zur Existenz gemeinsamer Integralfächen erforderlich sind. Diese schwierige Frage findet ihre Antwort im folgenden merkwürdigen Satze, den wir in dieser Note beweisen.

*Wird eine Fläche in mehr als zwei Weisen durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt, so befriedigt sie zwei partielle Differentialgleichungen 2. O. der Form*

$$\xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) s + \eta_1 \eta_2 t = 0$$

$$\xi_3 \xi_4 r + (\xi_3 \eta_4 + \xi_4 \eta_3) s + \eta_3 \eta_4 t = 0.$$

*Die Grössen  $\xi_i \eta_i$  sind bestimmt durch*

$$p \xi_i + q \eta_i = 1, \quad \eta_i = f_i(\xi_i)$$

*und zwar ist  $\eta_i = f_i(\xi_i)$  eine algebraische Relation, die durch eine (von  $i$  unabhängige) Gleichung vierten Grades zwischen  $\eta_i$  und  $\xi_i$  ausgedrückt werden kann.*

Die direkte Behandlung des gestellten Problems verlangt ziemlich weitläufige Rechnungen. Dieselben können indess wesentlich abgekürzt werden, wenn man zuerst zwei specielle Fälle des allgemeinen Problems erledigt.

### § 1.

**Ueber Flächen, die in mehreren Weisen durch Translation von ebenen Curven erzeugt werden.**

In diesem Paragraphen suche ich alle Flächen, die in zwei Weisen durch Translation von *ebenen* Curven erzeugt werden. Da eine derartige Fläche durch eine jede lineare Transformation des Raumes, die die unendlich entfernte Ebene invariant läst, in eine ebensolche Fläche übergeführt wird, so kann man ohne wesentliche Beschränkung annehmen, dass die besprochenen ebenen Curven in den Ebenen  $x = \text{Const.}$  und  $y = \text{Const.}$  gelegen sind. Dann aber befriedigt unsere Fläche zwei Relationen der Form:

$$(2) \quad pX + qX_1 = 1, \quad pY + qY_1 = 1$$

wo  $X$  und  $X_1$  nur von  $x$ ;  $Y$  und  $Y_1$  nur von  $y$  abhängen. Diese vier Funktionen erfüllen gewisse Integrabilitätsbedingungen, die wir zunächst bestimmen müssen. Durch Auflösung kommt

$$p = \frac{Y_1 - X_1}{X Y_1 - X_1 Y}, \quad q = \frac{X - Y}{X Y_1 - X_1 Y},$$

woraus durch Differentiation

$$\frac{d}{dy} \frac{Y_1 - X_1}{X Y_1 - X_1 Y} = \frac{d}{dx} \frac{X - Y}{X Y_1 - X_1 Y},$$

und durch Ausführung

$$(3) \quad X_1 \left( (X - Y) Y_1' + (Y_1 - X_1) Y' \right) = Y \left( (X - Y) X_1' + (Y_1 - X_1) X' \right).$$

Diese Funktionalgleichung bestimmt die vier Grössen  $XX_1YY_1$  vollständig. Für das Folgende ist es nützlich zu bemerken, dass man u. A. annehmen darf, dass  $X_1$  eine lineare Funktion von  $X$ , und  $Y_1$  eine lineare Funktion von  $Y$  ist; dass also

$$X_1 = AX + B, \quad Y_1 = CY + D$$

ist. Denn hierdurch erhält die Funktionalgleichung die Form

$$(AX + B) \left( (C - A)X + D - B \right) Y' = Y \left( (C - A)Y + D - B \right) X',$$

sodass ihre Integration in diesem speziellen Falle keine Schwierigkeit darbietet. Hiermit kennen wir indess keineswegs die allgemeine Lösung von (3). Um dieselbe zu finden, müssen wir zunächst unsere Funktionalgleichung auf eine zweckmässigere Form bringen.

Die Gleichungen (2) geben durch Differentiation vier Gleichungen zweiter Ordnung, unter denen wir indess nur die beiden.

$$Xs + X_1 t = 0, \quad Yr + Y_1 s = 0 \quad (3')$$

bilden brauchen. Dieselben liefern durch wiederholte Differentiation zur Bestimmung der vier Grössen

$$\alpha = \frac{d^3 z}{dx^3}, \beta = \frac{d^3 z}{dx^2 dy}, \gamma = \frac{d^3 z}{dx dy^2}, \delta = \frac{d^3 z}{dy^3}$$

die vier Relationen

$$\left. \begin{aligned} Y\alpha + Y_1\beta &= 0, \\ X\beta + X_1\gamma &= \frac{dX}{dx} s + \frac{dX_1}{dx} t, \\ Y\beta + Y_1\gamma &= \frac{dY}{dy} r + \frac{dY_1}{dy} s, \\ X\gamma + X_1\delta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

welche die bekannten Integrabilitätsbedingungen erfüllen müssen. Die zweite und dritte unter diesen Gleichungen (4) geben

$$\left. \begin{aligned} (XY_1 - X_1Y)\beta &= Y_1 \frac{dX}{dx} s + Y_1 \frac{dX_1}{dx} t - X_1 \frac{dY}{dy} r - X_1 \frac{dY_1}{dy} s, \\ (XY_1 - X_1Y)\gamma &= -Y \frac{dX}{dx} s - Y \frac{dX_1}{dx} t + X \frac{dY}{dy} r + X \frac{dY_1}{dy} s. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Hier ist es zweckmässig  $X_1$  als Funktion\*) von  $X$  und  $Y_1$  als Funktion von  $X$  zu betrachten. Es ist

$$pX + qX_1 = 1, \quad pY + qY_1 = 1$$

also wird, wenn wir  $\frac{dX_1}{dX} = X_1', \quad \frac{dY_1}{dY} = Y_1'$  setzen

$$(p + qX_1') \frac{dX}{dx} = -Xr - X_1s,$$

$$(p + qY_1') \frac{dY}{dy} = -Ys - Y_1t$$

---

\*) Im Texte sehen wir von dem Falle, dass  $X$  oder  $Y$  constant sind, weg.  
Ist z. B.

$X = \text{einer Constanten,}$

so giebt es ipso (jedenfalls) drei Erzeugungen durch ebene Curven; die entsprechenden Flächen gehören zu den längst von mir bestimmten Flächen, die unendlich viele Translationserzeugungen gestatten.

und

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{Xr + X_1 s}{p + q X_1'}, \quad \frac{dY}{dy} = -\frac{Ys + Y_1 t}{p + q Y_1'}.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in (5) kommt

$$\beta = -\frac{Y_1(s + X_1' t)}{X Y_1 - X_1 Y} \frac{Xr + X_1 s}{p + q X_1'} + \frac{X_1(r + Y_1' s)}{X Y_1 - X_1 Y} \frac{Ys + Y_1 t}{p + q Y_1'}$$

$$\gamma = \frac{Y(s + X_1' t)}{X Y_1 - X_1 Y} \frac{Xr + X_1 s}{p + q X_1'} - \frac{X(r + Y_1' s)}{X Y_1 - X_1 Y} \frac{Ys + Y_1 t}{p + q Y_1'}$$

und durch Bildung der Integrabilitätsbedingung  $\frac{d\beta}{dy} = \frac{d\gamma}{dx}$  erhalten wir eine Relation der Form

$$f X_1'' + \varphi Y_1'' + \psi = 0 \quad (6)$$

wo die Grössen  $f$  und  $\varphi$ , wie man leicht findet, die Werthe

$$f = -\frac{Y(Xr + X_1 s)^2}{X Y_1 - X_1 Y} \frac{pt - qs}{(p + q X_1')^3}$$

$$\varphi = \frac{X_1(Ys + Y_1 t)^2}{X Y_1 - X_1 Y} \frac{ps - qr}{(p + q Y_1')^3}$$

besitzen, während  $\psi$  durch Einsetzung der Werthe (4) der Grössen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  in eine Funktion von

$$X, Y, X_1, Y_1, X_1', Y_1', p, q, r, s, t$$

übergeht.

Die Relationen  $Xs + X_1 t = 0$ ,  $Yr + Y_1 s = 0$  gestatten überdies aus den Ausdrücken  $f$ ,  $\varphi$  und  $\psi$  die Grössen  $r$  und  $t$  wegzuschaffen. Aus der hierdurch gefundenen Gleichung (6) fällt die Grösse  $s$  einfach weg, indem  $f$ ,  $\varphi$  und  $\psi$  sämmtlich homogene Funktionen dritter Ordnung von  $s$  sind. Denken wir uns nun ferner die Grössen  $p$  und  $q$  vermöge der Relationen

$$pX + qX_1 = 1, \quad pY + qY_1 = 1$$

aus (6) weggeschafft, so verschwindet, behaupte ich,  $\psi$  iden-

tisch. Denn setzen wir voraus, dass  $X_1$  und  $Y_1$  beliebige lineare Funktionen bez. von  $X$  und von  $Y$ :

$$X_1 = A X + B, \quad Y_1 = C Y + D$$

sind, so soll nach dem Vorgehenden die Gleichung (6) bestehen und somit  $\psi$  verschwinden, was, da  $A, B, C$  und  $D$  arbiträre Constante sind, das identische Verschwinden von  $\psi$  verlangt. Die Bedingungsgleichung (6) erhält somit die Form  $f X_1'' + \varphi Y_1'' = 0$ , oder durch Ausführung der besprochenen Substitution und Ausscheidung des gemeinsamen Faktors

$$\frac{X Y_1 - X_1 Y}{Y X_1}$$

die bemerkenswerthe Form

$$\frac{X_1''}{(p+q X_1')^3} + \frac{Y_1''}{(p+q Y_1')^3} = 0. \quad (7)$$

Diese Gleichung lehrt, dass  $X_1$  und  $X$  durch eine algebraische Gleichung zweiten Grades verknüpft sind, und dass  $Y_1$  und  $Y$  durch eben dieselbe Gleichung verbunden sind.

Bildet man die beiden Relationen,

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{d\beta}{dx}, \quad \frac{d\gamma}{dy} = \frac{d\delta}{dx},$$

so erhält man wiederum nur die Gleichung (7), welche somit die einzige Integrabilitätsbedingung der Gleichungen (4) oder (3') darstellt. Wir können daher

$$a X_1^2 + b X^2 + 2c X_1 X + 2d X_1 + 2e X + f = 0$$

$$a Y_1^2 + b Y^2 + 2c Y_1 Y + 2d Y_1 + 2e Y + f = 0$$

setzen. Führen wir diese Werthe in (3) ein, so erhalten wir die Relation

$$\frac{Y'}{Y(a Y_1 + c Y + d)} = \frac{-X'}{X_1(a X_1 + c X + d)},$$



die in allgemeinsten Weise durch die Annahme

$$\frac{Y'}{Y(a Y_1 + c Y + d)} = m = \text{Const.}$$

$$\frac{X'}{X_1(a X_1 + c X + d)} = -m + \text{Const.}$$

erfüllt wird.

*Man findet daher alle Flächen, welche zwei Relationen der Form*

$$p X + q X_1 = 1, \quad p Y + q Y_1 = 1$$

*erfüllen, wenn man die beiden Gleichungen*

$$a X_1^2 + b X^2 + 2 c X_1 X + 2 d X_1 + 2 e X + f = 0$$

$$a Y_1^2 + b Y^2 + 2 c Y_1 Y + 2 d Y_1 + 2 e Y + f = 0$$

*feststellt und darnach  $X$  und  $Y$  als Funktionen von  $x$  und  $y$  durch Integration von*

$$\frac{Y'}{Y(a Y_1 + c Y + d)} = m, \quad \frac{X'}{X_1(a X_1 + c X + d)} = -m$$

*bestimmt.*

*Hiermit sind alle Flächen gefunden, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung von ebenen Curven erzeugt werden.*

*Beispiel I.* Lass uns

$$X_1 = X^2, \quad Y_1 = Y^2$$

setzen. Dann wird

$$\frac{Y'}{Y} = n, \quad \frac{X'}{X^2} = -n$$

und

$$Y = e^{ny}, \quad X = \frac{1}{nx}$$

woraus

$$p = nx + e^{-ny}, \quad q = -nx e^{-ny}$$

und schliesslich

$$z = x e^{-ny} + \frac{n}{2} x^2.$$

*Beispiel 2.* Sei

$$X_1 X = 1, \quad Y_1 Y = 1.$$

Dann wird

$$\frac{Y'}{Y^2} = -n, \quad X' = n$$

und

$$\frac{1}{Y} = ny, \quad X' = nx$$

woraus

$$p = \frac{ny}{n^2 xy + 1}, \quad q = \frac{nx}{n^2 xy + 1}$$

und durch Integration

$$nz = \log(n^2 xy + 1).$$

*Beispiel 3.* Sei

$$X_1^2 + X^2 = 1, \quad Y_1^2 + Y^2 = 1.$$

Dann wird

$$\frac{Y'}{Y \sqrt{1 - Y^2}} = -m, \quad \frac{X'}{1 - X^2} = m$$

woraus

$$X = \frac{e^{2mx} - 1}{e^{2mx} + 1}, \quad \sqrt{1 - Y^2} = \frac{e^{2my} - 1}{e^{2my} + 1}.$$

Um die Rechnungen abzukürzen, setzen wir

$$X = \sin f, \quad X_1 = \cos f, \quad Y = \sin \varphi, \quad Y_1 = \cos \varphi.$$

Dann wird

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\cos \varphi - \cos f}{\sin(f - \varphi)}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{\sin f - \sin \varphi}{\sin(f - \varphi)}$$

und

$$m \frac{dz}{df} = \frac{1}{\cos f} \cdot \frac{\cos \varphi - \cos f}{\sin f \cdot \cos \varphi - \cos f \cdot \sin \varphi}$$

$$-m \frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sin f - \sin \varphi}{\sin f \cdot \cos \varphi - \cos f \cdot \sin \varphi}$$

woraus, wie man leicht verificirt, durch Integration

$$-m z = \log \frac{\sin \varphi \cdot \cos f}{\cos^2 \frac{\varphi - f}{2}} + \text{Const.}$$

Führt man schliesslich die Werthe der Grössen  $\varphi$  und  $f$  ein, so erhält man die Gleichung der Fläche in der Form

$$\text{Const. } e^{-mz} = \frac{e^{2mx} e^{2my}}{(1 + e^{4mx})(1 + e^{4my}) + 2 e^{2mx}(e^{4my} - 1) + 2 e^{2my}(e^{4mx} - 1)}$$

Diese Gleichung ist algebraisch hinsichtlich der Grössen  $e^{mx}$ ,  $e^{my}$ ,  $e^{mz}$ .

In einer früheren Arbeit (Weitere Untersuchungen über Minimalflächen, -Archiv for Math. og Naturv. Bd. 4) erledigte ich einen anderen speciellen Fall des allgemeinen Problems. Ich suchte nemlich partielle Differentialgleichungen 2. O. der Form

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \eta_1 \xi_2) s + \eta_1 \eta_2 t &= 0 \\ \xi_3 \xi_4 r + (\xi_3 \eta_4 + \eta_3 \xi_4) s + \eta_3 \eta_4 t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

mit gemeinsamen Integralflächen, indem ich die Beschränkung hinzufügte, dass sowohl  $\xi_1 \eta_1$  wie  $\xi_2 \eta_2$  durch eine vorgelegte algebraische Gleichung zweiten Grades verknüpft waren. Ich fand, dass dann immer sowohl  $\xi_3 \eta_3$  wie  $\xi_4 \eta_4$  einer gewissen anderen Gleichung zweiten Grades genügten. Diesen wichtigen Satz brauche ich indess nicht für das Folgende

als bekannt voranzusetzen. Dagegen betrachte ich im Folgenden als bekannt, dass die Gleichungen (8) gemeinsame Integralfächen besitzen, wenn einerseits sowohl  $\eta_1 \xi_1$  wie  $\eta_2 \xi_2$  eine Gleichung zweiten Grades befriedigen, und andererseits  $\eta_3 \xi_3$  und  $\eta_4 \xi_4$  eine gewisse andere Gleichung zweiten Grades erfüllen. Dieser Satz folgt übrigens durch einfache Betrachtungen aus dem im Vorangehenden bewiesenen Satze, dass die Gleichungen

$$p X + q X_1 = 1, \quad p Y + q Y_1 = 1$$

gemeinsame Integralfächen besitzen, wenn  $X_1$  eine lineare Funktion von  $X$  ist, und  $Y_1$  eine gewisse andere lineare Funktion von  $Y$  ist.

## § 2.

Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translation von gewundenen Curven erzeugt werden.

Jetzt ist es möglich unser allgemeines Problem anzugreifen. Durch Differentiation der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) s + \eta_1 \eta_2 t &= 0 \\ \xi_3 \xi_4 r + (\xi_3 \eta_4 + \xi_4 \eta_3) s + \eta_3 \eta_4 t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

erhalten wir zur Bestimmung der Differentialquotienten dritter Ordnung  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  vier Gleichungen, die durch Anwendung der Symbole

$$\xi_k \frac{df}{dx} + \eta_k \frac{df}{dy} = A_k f$$

die Form

$$\xi_1 \xi_2 \alpha + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) \beta + \eta_1 \eta_2 \gamma = A_2 p \frac{d\xi_1}{dx} + A_2 q \frac{d\eta_1}{dx} + A_1 p \frac{d\xi_2}{dx} + A_1 q \frac{d\eta_2}{dx}$$

$$\xi_1 \xi_2 \beta + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) \gamma + \eta_1 \eta_2 \delta = A_2 p \frac{d\xi_1}{dy} + A_2 q \frac{d\eta_1}{dy} + A_1 p \frac{d\xi_2}{dy} + A_1 q \frac{d\eta_2}{dy}$$

$$\xi_3 \xi_4 \alpha + (\xi_3 \eta_4 + \xi_4 \eta_3) \beta + \eta_3 \eta_4 \gamma = A_4 p \frac{d\xi_3}{dx} + A_4 q \frac{d\eta_3}{dx} + A_3 p \frac{d\xi_4}{dx} + A_3 q \frac{d\eta_4}{dx}$$

$$\xi_3 \xi_4 \beta + (\xi_3 \eta_4 + \xi_4 \eta_3) \gamma + \eta_3 \eta_4 \delta = A_4 p \frac{d\xi_3}{dy} + A_4 q \frac{d\eta_3}{dy} + A_3 p \frac{d\xi_4}{dy} + A_3 q \frac{d\eta_4}{dy}$$

annehmen. Ehe wir weiter gehen, müssen wir die Differentialquotienten von  $\xi_i, \eta_i$  hinsichtlich  $x$  und  $y$  berechnen. Es ist

$$\xi_1 p + \eta_1 q = 1,$$

also wird

$$\frac{d\xi_1}{dp} (p + q \eta'_i) + \xi_1 = 0, \quad \frac{d\xi_1}{dq} (p + q \eta'_i) + \eta_1 = 0;$$

und



$$\frac{d\tilde{\xi}_i}{dx} = \frac{d\tilde{\xi}_i}{dp} r + \frac{d\tilde{\xi}_i}{dq} s = -\frac{\tilde{\xi}_i r + \eta_i s}{p + q \eta_i'} = -\frac{A_i p}{p + q \eta_i'},$$

$$\frac{d\tilde{\xi}_i}{dy} = \frac{d\tilde{\xi}_i}{dp} s + \frac{d\tilde{\xi}_i}{dq} t = -\frac{\tilde{\xi}_i s + \eta_i t}{p + q \eta_i'} = -\frac{A_i q}{p + q \eta_i'},$$

und andererseits

$$\frac{d\eta_i}{dx_i} = \eta_i' \frac{d\tilde{\xi}_i}{dx} = -\frac{\eta_i' A_i p}{p + q \eta_i'}, \quad \frac{d\eta_i}{dy} = \eta_i' \frac{d\tilde{\xi}_i}{dy} = -\frac{\eta_i' A_i q}{p + q \eta_i'}.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe kommt

$$\tilde{\xi}_1 \tilde{\xi}_2 \alpha + (\tilde{\xi}_1 \eta_2 + \tilde{\xi}_2 \eta_1) \beta + \eta_1 \eta_2 \gamma = A_1 p \frac{A_2 p + \eta_1' A_2 q}{p + q \eta_1'} + A_2 p \frac{A_1 p + \eta_2' A_1 q}{p + q \eta_2'}$$

$$\tilde{\xi}_1 \tilde{\xi}_2 \alpha + (\tilde{\xi}_1 \eta_2 + \tilde{\xi}_2 \eta_1) \gamma + \eta_1 \eta_2 \delta = A_1 q \cdot \frac{A_2 p + \eta_1' A_2 q}{p + q \eta_1'} + A_2 q \frac{A_1 p + \eta_2' A_1 q}{p + q \eta_2'}$$

$$\tilde{\xi}_3 \tilde{\xi}_4 \alpha + (\tilde{\xi}_3 \eta_4 + \tilde{\xi}_4 \eta_3) \beta + \eta_3 \eta_4 \gamma = A_3 p \frac{A_4 p + \eta_3' A_4 q}{p + q \eta_3'} + A_4 p \frac{A_3 p + \eta_4' A_3 q}{p + q \eta_4'}$$

$$\tilde{\xi}_3 \tilde{\xi}_4 \beta + (\tilde{\xi}_3 \eta_4 + \tilde{\xi}_4 \eta_3) \gamma + \eta_3 \eta_4 \delta = A_3 q \frac{A_4 p + \eta_3' A_4 q}{p + q \eta_3'} + A_4 q \frac{A_3 p + \eta_4' A_3 q}{p + q \eta_4'}$$

Bezeichnen wir die Determinante der Coefficienten  $\xi_1 \xi_2, \dots \eta_3 \eta_4$  mit  $\Delta^*$  und ihre dreigliedrige Unterdeterminanten mit  $\Delta_{ik}$ , so wird

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{A_1 p \Delta_{11} - A_1 q \Delta_{12}}{\Delta} \frac{A_2 p + \eta_1' A_2 q}{p + q \eta_1'} + \frac{A_2 p \Delta_{11} - A_2 q \Delta_{12}}{\Delta} \frac{A_1 p + \eta_2' A_1 q}{p + q \eta_2'} \\ &+ \frac{A_3 p \Delta_{13} - A_3 q \Delta_{14}}{\Delta} \frac{A_4 p + \eta_3' A_4 q}{p + q \eta_3'} + \frac{A_4 p \Delta_{13} - A_4 q \Delta_{14}}{\Delta} \frac{A_3 p + \eta_4' A_3 q}{p + q \eta_4'}, \\ -\beta &= \frac{A_1 p \Delta_{21} - A_1 q \Delta_{22}}{\Delta} \frac{A_2 p + \eta_1' A_2 q}{p + q \eta_1'} + \frac{A_2 p \Delta_{21} - A_2 q \Delta_{22}}{\Delta} \frac{A_1 p + \eta_2' A_1 q}{p + q \eta_2'} \\ &+ \frac{A_3 p \Delta_{23} - A_3 q \Delta_{24}}{\Delta} \frac{A_4 p + \eta_3' A_4 q}{p + q \eta_3'} + \frac{A_4 p \Delta_{23} - A_4 q \Delta_{24}}{\Delta} \frac{A_3 p + \eta_4' A_3 q}{p + q \eta_4'}. \end{aligned}$$

Die Integrabilitätsbedingung

$$d\alpha \frac{d\beta}{dy} = \frac{d\beta}{dx}$$

\*) Man verificirt leicht, dass  $\Delta$  nur für developpable Integralfächen verschwindet (Archiv für Math. og Naturv., Bd. 4 p. 503–504).

liefert die Relation

$$\begin{aligned}
 & \frac{\eta_1''}{(p+q\eta_1')^3} \left\{ (A_1 p \Delta_{11} - A_1 q \Delta_{12}) A_1 q + (A_1 p \Delta_{21} - A_1 q \Delta_{22}) A_1 p \right\} \frac{q A_2 p - p A_2 q}{\Delta} \\
 & + \frac{\eta_2''}{(p+q\eta_2')^3} \left\{ (A_2 p \Delta_{11} - A_2 q \Delta_{12}) A_2 q + (A_2 p \Delta_{21} - A_2 q \Delta_{22}) A_2 p \right\} \frac{q A_1 p - p A_1 q}{\Delta} \\
 & + \frac{\eta_3'}{(p+q\eta_3')^3} \left\{ (A_3 p \Delta_{13} - A_3 q \Delta_{14}) A_3 q + (A_3 p \Delta_{23} - A_3 q \Delta_{24}) A_3 p \right\} \frac{q A_4 p - p A_4 q}{\Delta} \\
 & + \frac{\eta_4'}{(p+q\eta_4')^3} \left\{ (A_4 p \Delta_{13} - A_4 q \Delta_{14}) A_4 q + (A_4 p \Delta_{23} - A_4 q \Delta_{24}) A_4 p \right\} \frac{q A_3 p - p A_3 q}{\Delta} \\
 & + \psi = 0,
 \end{aligned}$$

wo  $\psi$  nach Einsetzung der Werthe der Grössen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  nur von  $p q r s t, \xi_i, \eta_i$  und den  $\eta_i'$  abhängt. Eliminiren wir sodann  $r$  und  $s$  aus der letzten Gleichung vermöge (9), so fällt auch  $t$  weg. Endlich benutzen wir die vier Gleichungen

$$p \xi_i + q \eta_i = 1$$

zur Elimination von  $p$  und  $q$  und zwei unter den Grössen  $\eta_i, \xi_i$ . Erinnern wir, dass unsere Integrabilitätsbedingung erfüllt wird, wenn die  $\eta_i$  arbiträre lineare Funktionen der entsprechenden  $\xi_i$  sind, so erkennen wir, dass die Grösse  $\psi$  identisch verschwinden muss. Wir können daher

$$\sum_1^4 \frac{\eta_i''}{(p + q \eta_i')^3} f_i (\xi_1 \xi_2 \dots \eta_4) = 0 \quad (10)$$

setzen, und es fragt sich nach den Werthen der Grössen  $f_i$ . Früher haben wir nun gesehen, dass unsere Relation erfüllt wird, wenn gleichzeitig

$$\frac{\eta_1''}{(p + q \eta_1')^3} + \frac{\eta_2''}{(p + q \eta_2')^3} = 0$$

$$\frac{\eta_3''}{(p + q \eta_3')^3} + \frac{\eta_4''}{(p + q \eta_4')^3} = 0$$

ist. Hieraus schliessen wir dass

$$f_1 = f_2 \text{ und } f_3 = f_4$$

ist. Andererseits aber wissen wir, dass die Relation (10) ebenfalls durch die Annahme

$$\eta_1'' = 0, \eta_3'' = 0, \frac{\eta_2''}{(p + q \eta_2')^3} + \frac{\eta_4''}{(p + q \eta_4')^3} = 0$$

erfüllt wird, und also ist  $f_3 = f_4$ , sodass unsere Bedingungs-  
gleichung (10) die bemerkenswerthe Form

$$\sum_1^4 \frac{\eta_i''}{(p + q \eta_i')^3} = 0 \quad (11)$$

annimmt. Ein analoges Raisonement zeigt, dass auch die Relationen

$$\frac{d\beta}{dy} = \frac{d\gamma}{dx}, \quad \frac{d\gamma}{dy} = \frac{d\delta}{dx}$$

durch Ausführung die soeben gefundene einfache Form annehmen. Nach einem soeben von *E. Holst* (Archiv for Math. og Naturv. Bd. 7, H 1) publicirten schönen Satze wird die gefundene Bedingungs-  
gleichung erfüllt, wenn die beiden Grössen  $\eta_i \xi_i$  eine von der Zahl  $i$  unabhängige algebraische Relation vierten Grades

$$a \eta^4 + b \eta^3 \xi + c \eta^2 \xi^2 + \dots + l \eta + m \xi = n$$

befriedigen, und nach einer complettirenden Bemerkung von

mir giebt es keine andere Relationen, welche die Differentialgleichung (11) erfüllen.

Man findet daher alle Flächen, die in mehr als zwei Weisen durch Translation einer Curve erzeugt werden, indem man zuerst eine beliebige irreductible oder reductible algebraische Gleichung vierten Grades zwischen  $\xi$  und  $\eta$  etwa

$$\varphi(\xi, \eta) = 0$$

auswählt. Sodann sucht man, indem man beiläufig  $\xi$  als eine Constante betrachtet, die vier Wurzeln

$$f_1(\xi), f_2(\xi), f_3(\xi), f_4(\xi)$$

der letzten Gleichung. Darnach setzt man

$$\eta_1 = f_1(\xi_1), \eta_2 = f_2(\xi_2), \eta_3 = f_3(\xi_3), \eta_4 = f_4(\xi)$$

und bildet die beiden partiellen Differentialgleichungen 2. O.

$$\xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) s + \eta_1 \eta_2 t = 0$$

$$\xi_3 \xi_4 r + (\xi_3 \eta_4 + \xi_4 \eta_3) s + \eta_3 \eta_4 t = 0.$$

\*) Sei überhaupt vorgelegt eine Relation der Form

$$f_1 \eta_1'' + f_2 \eta_2'' + \dots + f_n \eta_n'' = 0,$$

in der die  $f_k$  Funktionen von den  $\eta_i, \xi_i$  und  $\eta_i'$  sind, während immer

$$\begin{vmatrix} \eta_a \xi_a & 1 \\ \eta_b \xi_b & 1 \\ \eta_c \xi_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ist. Durch Differentiation findet man zwei unabhängige Relationen zwischen den  $\eta_k'''$ , drei unabhängige Relationen zwischen den  $\eta_k^{(4)}$ ... und zuletzt  $n$  unabhängige Relationen zwischen den  $n$  Grössen  $\eta_k^{(n+1)}$ , die hiermit bestimmt sind. Dass allgemeine Integral dieser Differentialgleichungen, die nach ihrer Form kein singuläres Integral besitzen, enthält also höchstens  $\frac{n(n+3)}{2}$  arbiträre Constanten. Nun aber enthält die Gleichung

einer ebenen algebraischen Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung  $\frac{n(n+3)}{2}$  wesentliche

Constanten. Also schliessen wir, dass die von Holst gefundene allgemeine Eigenschaft der algebraischen Curven  $n^{\text{ter}}$  Ordnung für diese Curven charakteristisch ist.



In denselben betrachtet man die  $\xi_i \eta_i$  als Funktionen von  $p$  und  $q$ , bestimmt durch die Gleichungen

$$p \xi_i + q \eta_i = 1, \quad \eta_i = f_i(\xi_i)$$

Als dann haben unsere beiden partiellen Differentialgleichungen  $\propto^4$  nicht developpable, aehnliche und gleichgestellte Integralflächen, die durch Quadratur bestimmt werden.

Es liegt nun nah zu fragen, wie viele verschiedene Erzeugungen durch Translationsbewegung einer Curve eine nicht developpable Fläche gestatten kann. Bei der Beantwortung dieser Frage müssen wir erinern, dass die besprochenen Erzeugungen paarweise zusammenhören. Lass uns annehmen, dass eine Fläche durch Translation von  $m$  Curven  $c: c_1 c_2 \dots c_m$  und dementsprechend durch Translation von  $m$  Curven  $k: k_1 k_2 \dots k_m$  erzeugt wird. Nehmen wir nun zwei Curven der ersten Gattung etwa  $c_i$  und  $c_j$  und zugleich die beiden entsprechenden Curven der zweiten Gattung  $k_i k_j$ , so sind alle Tangenten dieser vier Curven parallel mit den Geraden eines algebraischen Kegels vierter Ordnung. Sei dieser Kegel irreductibel. Ist die Fläche gegeben, so bestimmt die Curve  $c_i$  den betreffenden Kegel, und also gleichzeitig nicht allein  $k_i$  sondern auch  $c_j$  und  $k_j$  vollständig. Ist dagegen der Kegel reductibel, so sind mehrere Fälle denkbar. Zerfällt der Kegel in einen Kegels dritter Ordnung und eine Ebene, so ist eine und nur eine unter den vier Curven  $c_i c_j k_i k_j$  etwa  $c_i$  eben, während die Tangenten der drei anderen Curven mit den Geraden des Kegel dritter Ordnung parallel sind. Denkt man sich nun die Fläche und die Curve  $c_i$  gegeben, so ist zuerst die Curvenschaar  $k_i$  eindeutig bestimmt, und hiernach sind auch die beiden Schaaren  $c_j$  und  $k_j$  unzweidentig bestimmt. Lass uns jetzt annehmen, dass der Kegel vierter Ordnung in zwei Kegel zweiter Ordnung zerfällt; dann sind zwei wesentlich verschiedene Fälle denkbar. Sind die Tangenten der Curven  $c_i$  und  $k_i$  nicht mit den Erzeugenden desselben unter den

beiden Kegel zweiter Ordnung parallel, so sind, wenn wir uns fortwährend die Fläche als gegeben denken, die Schaa-  
ren  $c_j$  und  $k_j$  unzweideutig bestimmt, wenn  $c_i$  und in Folge  
dessens  $k_i$  gegeben sind. Sind dagegen die Tangenten der  
Curven  $c_i$  und  $k_i$  mit den Erzeugenden eines gemeinsamen  
Kegels zweiter Ordnung parallel, so sind  $c_j$  und  $k_j$  nicht ohne  
weiter bestimmt. Die dieser Annahme entsprechenden Flächen  
können, wie ich früher (Weitere Uebersuchungen über Mini-  
nalflächen, Archiv for Math. Bd. 4) gezeigt habe, in un-  
endlich vielen Weisen durch Translationsbewegung einer  
Curve erzeugt werden. Zerfällt der Kegel vierter Ordnung in  
einen irreductiblen Kegel zweiten Grades und zwei Ebenen,  
so sind wiederum zwei Fälle denkbar. Sind  $c_i$  und  $c_j$  eben,  
so bestimmt  $c_i$  zuerst  $k_i$  darnach  $k_j$  und endlich  $c_j$  unzwei-  
deutig. Sind dagegen  $c_i$  und  $k_i$  eben, so gehört die Fläche  
zu denjenigen, die unendlich viele Translationserzeugungen  
gestatten. Zerfällt endlich der Kegel vierter Ordnung in vier  
Ebenen, so gestattet wiederum die Fläche unendlich viele  
Translationserzeugungen. Wir resumiren das Obenstehende  
in folgendem Schema.

1) Die Tangenten der Curven  $c_1, k_1, c_2$  und  $k_2$   
sind parallel mit den Erzeugenden eines irreduc-  
tiblen Kegels vierter Ordnung.

2) Die eine Curve ist eben, die Tangenten  
der drei übrigen sind parallel mit den Erzeu-  
genden eines irreductiblen Kegels dritter Ordnung.

3) Die Tangenten der Curven  $c_1$  und  $c_2$  sind  
parallel mit den Erzeugenden eines gemeinsamen  
Kegels zweiten Grades. Die Curven  $k_1$  und  $k_2$   
stehen im selben Verhältnisse zu einem anderen  
Kegel zweiten Grades.

4)  $c_1$  und  $c_2$  sind eben. Die Tangenten der  
Curven  $k_1$  und  $k_2$  sind parallel mit den Erzeu-  
genden eines Kegels zweiten Grades.

Flächen mit  
vier und nur  
vier Transla-  
tionserzeu-  
gungen.

Flächen mit  
unendlich  
vielen Trans-  
lationserzeu-  
gungen\*).

5) Die Tangenten der Curven  $c_1$  und  $k_1$  sind parallel mit den Erzeugenden eines irreductiblen Kegels zweiten Grades, während  $c_2$  und  $k_2$  im-  
selben Verhältnisse zu einem anderen Kegel  
zweiten Grades stehen.

6) Die Curven  $c_1, k_1, c_2, k_2$  sind eben, und  
liegen dabei in Ebenen, die mit einer gewissen  
Gerade parallel sind.

Es ist übrigen selbstverständlich, dass die projectivische Eintheilung der algebraischen Kegel (ebenen Curven) vierter Ordnung eine naturgemässe Classification aller Flächen mit mehr als zwei Translationserzeugungen liefert\*\*).

### § 3.

Ueber Flächen mit mehreren Schaaren Curven, die hinsichtlich eines Tetraeders homographische Verwandte sind.

Die in dieser Note erledigte Frage giebt sozusagen unmittelbar die Antwort auf eine andere interessante Frage, wie ich übrigens schon in meiner früher citirten Note: Kurzes Resumé ... angedeutet habe.

Lass mich annehmen dass die Fläche

$$f(x y z) = 0$$

durch Translation einer Curve

\*) Schon in 1872 (Kurzes Resumé u. s. w.) kündigte ich an, dass ich alle Flächen mit unendlich vielen Translationserzeugungen bestimmt hatte. Foss schrieb mir neuerdings, dass eine Fläche mit mehr als vier immer unendlich viele Translationserzeugungen besitzt; es war ihm indess nicht gelungen Flächen mit nur vier Translationserzeugungen wirklich aufzufinden. Als Antwort theilte ich ihm die definitive Theorie des Textes mit.

\*\*) Wenn der im Vorangehenden besprochene Kegel vierter Ordnung eine lineare infinitesimale Transformation gestattet, (welche die Erzeugenden unter sich vertauscht), so ist dasselbe der Fall mit den entsprechenden Flächen.

$$f = 0 \quad \varphi(x y z) = 0$$

erzeugt werden kann. Analytisch ausgesprochen heisst dies, dass die Fläche  $f(x y z) = 0$  einfach unendlich viele Curven enthält, deren Gleichungen die Form

$$f(x + a, y + b, z + c) = 0, \quad \varphi(x + a, y + b, z + c) = 0$$

besitzen; dabei sind die Constanten  $b$  und  $c$  gewisse Functionen der Constante  $a$ :

$$b = b(a), \quad c = c(a).$$

Jetzt führe ich statt  $x y z$  neue Variabeln  $x' y' z'$  ein, indem ich

$$x = \log x', \quad y = \log y', \quad z = \log z'$$

setze. Dann enthält die Fläche

$$f(\log x', \log y', \log z') = 0 \quad (12)$$

unendlich viele Curven mit der Gleichungsform

$$\left. \begin{aligned} f(\log x' + a, \log y' + b, \log z' + c) &= 0 \\ \varphi(\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Ersetzen wir die Parameter  $a, b, c$  durch  $\alpha \beta \gamma$ :

$$a = \log \alpha, \quad b = \log \beta, \quad c = \log \gamma,$$

so erhalten die Gleichungen (13) die Form

$$f(\log \alpha x', \log \beta y', \log \gamma z') = 0$$

$$\varphi(\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}) = 0,$$

welche zeigt, dass die Fläche (12) unendlich viele Curven enthält, die homographische Verwandte sind hinsichtlich desjenigen Tetraeders, dessen Seitenflächen die Ebenen  $x' = 0$ ,  $y' = 0$ ,  $z' = 0$  und die unendlich entfernte Ebene sind.

*Es ist daher möglich alle Flächen anzugeben, welche*

mehrere Schaaren Curven enthalten, die hinsichtlich eines nicht ausgearteten Tetraeders homographische Verwandte sind\*).

Dieser Satz bleibt übrigens noch gültig, wenn man die Worte »nicht ausgearteten« weglässt.

Unter den Flächen, die man in dieser Weise erhält, giebt es mehrere *algebraische*, unter denen ich bei dieser Gelegenheit nur die tetraedralsymmetrischen und ihre Ausartungen hervorhebe.

Die Theorien dieser Note können auf  $n$  Dimensionen ausgedehnt werden. Hier beschränke ich mich indess auf die folgenden Andeutungen. Eine lineare Gleichung zwischen den Grössen  $e^{x_1} e^{x_2} \dots e^{x_n}$ :

$$A_1' e^{x_1} + A_2 e^{x_2} + \dots + A_n e^{x_n} = A_{n+1}$$

bestimmt in dem  $n$ -fach ausgedehnten Raume  $x_1 \dots x_n$  eine  $(n-1)$ -fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die in mehrfach unendlich vielen Weisen durch Translation von einfach, zweifach ....  $(n-2)$ -fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten erzeugt werden kann.

Kann eine zweifach ausgedehnte Fläche eines  $n$ -fach ausgedehnten Raumes in mehr als zwei Weisen durch Translation einer Curve erzeugt werden, so liegt sie immer in einem dreifach ausgedehnten *ebenen* Raume. Aehnliche Sätze bestehen für  $m$ -fach ausgedehnte Flächen eines  $(m+p)$ -fach ausgedehnten Raumes.

\*) Bei der detaillirten Ausführung der Entwicklungen des Textes muss man erinnern, dass alle Cylinderflächen in beliebig vielen Weisen durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden können.



# Analytischer Beweis eines geometrischen Satzes.

VON

ELLING HOLST.

Es wird vielleicht von Interesse sein auch einen analytischen Nachweis des oben (pg. 108) bewiesenen Satzes zu sehen.

Man wähle zur  $X$ -Achse die willkürliche Gerade, von deren Schnittpunkten mit der Kurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung es sich handelt. Es sei ein beliebiger dieser Schnittpunkte  $a_i$  und die Tangente der Kurve inselben

$$x + b_i y - a_i = 0;$$

dann ist die allgemeinste Gleichung der Kurve:

$$F_n \equiv y^2 \varphi_{n-2} + \prod_n (x + b_i y - a_i) = 0$$

Es gilt die Formel:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\rho_i \sin^3 \varphi_i} = 0$$

zu beweisen.

Man bekommt:

$$\frac{1}{\rho_i \sin^3 \varphi_i} = \frac{\frac{d^2 F}{dx^2} \left( \frac{dF}{dy} \right)^2 - 2 \frac{d^2 F}{dx dy} \frac{dF}{dx} \frac{dF}{dy} + \frac{d^2 F}{dy^2} \left( \frac{dF}{dx} \right)^2}{\left( \frac{dF}{dx} \right)^3} (x = a_i, y = 0).$$

Nun ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dx}(a_i, 0) &= \prod_{n-1} (a_i - a_p), \\ \frac{dF}{dy}(a_i, 0) &= b_i \prod_{n-1} (a_i - a_p), \\ \frac{d^2 F}{dx^2}(a_i, 0) &= 2 \sum \left[ \prod_{n-2} (a_i - a_p) \right], \\ \frac{d^2 F}{dx dy}(a_i, 0) &= \sum \left[ (b_i + b_j) \prod_{n-2} (a_i - a_p) \right], \\ \frac{d^2 F}{dy^2}(a_i, 0) &= 2 \sum \left[ b_i b_j \prod_{n-2} (a_i - a_p) \right] + 2 \varphi_{n-2}(a_i, 0) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p &\geq i \\ p &\leq i \\ p &\geq i \\ p &\leq j \\ j &\geq i \\ j &\leq i \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck für  $\frac{1}{\rho_i \sin^3 \varphi_i}$  hinein, bekommt man, indem man mit  $\left(\frac{dF}{dx}(a_i, 0)\right)^2$  kürzt,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_i \sin^3 \varphi_i} &= \\ 2 \frac{b_i^2 \left( \sum_{n-2} \prod (a_i - a_p) \right) - b_i \left( \sum_{n-2} [(b_i + b_j) \prod (a_i - a_p)] \right) + \sum_{n-2} [b_i b_j \prod (a_i - a_p)] + \varphi_{n-2}(a_i, 0)}{\frac{dF}{dx}(a_i, 0)} &= \\ 2 \frac{\sum \left[ (b_i^2 - b_i(b_i + b_j) + b_i b_j) \prod_{n-2} (a_i - a_p) \right] + \varphi_{n-2}(a_i, 0)}{\frac{dF}{dx}(a_i, 0)} &= 2 \frac{\varphi_{n-2}(a_i, 0)}{\frac{dF}{dx}(a_i, 0)} \end{aligned}$$

Endlich ist also

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\rho_i \sin^3 \varphi_i} = 2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varphi_{n-2}(a_i, 0)}{\frac{dF}{dx}(a_i, 0)}$$

Dies ist aber in Folge des bekannten *Jacobischen* Satzes identisch Null.

22 Mai 1882.

# Ueber Flächen, die infinitesimale und lineare Transformationen gestatten

VON

SOPUS LIE.

In zwei gemeinsamen Noten in den Comptes rendus (1870) der Pariseracademie behandelten *Klein* und ich Flächen, die zwei infinitesimale und lineare Transformationen gestatten, indem wir jedoch die Beschränkung hinzufügten, dass diese beiden inf. Transformationen permutabel\*) sein sollten. Es ist leicht Flächen aufzufinden, die zwei nicht permutable, lineare infinitesimale Transformationen gestatten. Man wähle in der That zwei lineare und infinitesimale Transformationen des Raumes  $x y z$  etwa  $Af$  und  $Bf$ , die in der Beziehung

$$B(A(f)) - A(B(f)) = Af$$

stehen und dabei keine Relation der Form

$$Bf = \lambda(x y z) Af$$

erfüllen. Dann bilden die linearen partiellen Differentialgleichungen

---

\*) Zwei Transformationen heissen permutabel, wenn ihre Reihenfolge gleichgültig ist; linear nenne ich, wie in der projectivischen Geometrie gewöhnlich, eine Punkttransformation des Raumes  $x, y, z$ , die gerade Linien in gerade Linien überführt.

$$Af = 0, Bf = 0$$

ein vollständiges System, dessen einfach unendlich viele, durch gewisse Quadraturen bestimmbare Integralflächen die infinitesimalen Transformationen  $Af$  und  $Bf$  gestatten.

In dieser Note stelle ich die Frage nach *allen* Flächen, die zwei oder mehrere lineare und infinitesimale Transformationen gestatten. Indem ich einige einfache Sätze aus meiner Theorie der Transformationsgruppen entlehne, finde ich durch einfache Ueberlegungen, ohne Rechnung, einerseits mehrere allgemeine Resultate, andererseits den Satz, dass sämmtliche nicht developable Flächen der verlangten Art gefunden werden, wenn man *zuerst* durch algebraische Operationen in allgemeinsten Weise zwei lineare und infinitesimale Transformationen  $Af$  und  $Bf$  aufsucht, die entweder permutabel sind und somit die Relation

$$B(A(f)) - A(B(f)) = 0$$

erfüllen oder auch in der Beziehung

$$B(A(f)) - A(B(f)) = A(f)$$

stehen, und dabei keine Relation der Form

$$Bf = \lambda(xyz) Af$$

befriedigen; und *darnach* die Integralflächen des vollständigen Systems

$$Af = 0, Bf = 0$$

durch zwei Quadraturen bestimmt.

Sei

$$\varphi(xyz) = 0$$

die Gleichung einer Fläche mit den  $r$  linearen und infinitesimalen Transformationen

$$A_k f = \xi_k \frac{df}{dx} + \eta_k \frac{df}{dy} + \zeta_k \frac{df}{dz} \quad (k = 1, 2 \dots r)$$

die bekanntlich durch  $\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}$  Relationen der Form

$$A_i (A_k (f)) - A_k (A_i (f)) = \sum_s c_{iks} A_s f \quad (1)$$

verknüpft sind. Ersetze ich die Variabeln  $x, y, z$ , durch die neuen Variabeln

$$z' = \varphi(xyz), \quad x' = X(xyz), \quad y' = Y(xyz)$$

so wird  $z' = 0$  die Gleichung der Fläche, während

$$A_k' f = \xi_k' \frac{df}{dx'} + \eta_k' \frac{df}{dy'} + \zeta_k' \frac{df}{dz'} \quad (2)$$

die neue Form der infinitesimalen Transformationen sein möge. Dabei müssen alle  $\zeta_k'$  durch die Substitution  $z' = 0$  gleich Null werden, indem die inf. Transformationen  $A_k' f$  nach Voraussetzung die Fläche  $z' = 0$  invariant lassen. Machen wir daher die Substitution  $z' = 0$  in den  $A_k' f$ , so erhalten wir  $r$  inf. Transformationen

$$A_k^0 f = \xi_k^0 \frac{df}{dx'} + \eta_k^0 \frac{df}{dy'}$$

zwischen den Variabeln  $x'$  und  $y'$ . Hierbei ist zunächst zu bemerken, dass diese  $r$  Transformationen  $A_k^0 f$  unabhängig sein müssen, indem zwei verschiedene lineare Transformationen des Raumes  $A_k f$  nie eine Fläche [und auch keine gewundene Curve] in identischer Weise in sich transformiren können\*).

\*) Weiss man nemlich, wie eine Fläche durch eine im Uebrigen unbekannte lineare Transformation des Raumes in sich transformirt wird, so kennt man es ipso die Transformation ihrer ebenen Schnitte, das heisst, die Transformation aller Ebenen des Raumes, und hiermit ist die betreffende lineare Transformation des Raumes vollständig bestimmt.



Es ist ferner einleuchtend, dass die Transformationen  $A_k^0 f$  durch  $\frac{r(r-1)}{2}$  Relationen verknüpft sind:

$$A_1^0(A_k^0(f)) - A_k^0(A_1^0(f)) = \sum_s c_{iks} A_s^0 f \quad (3)$$

in denen die Constanten  $c_{iks}$  dieselben Werthe wie in der Gleichung (1) haben.

Wir können ohne Beschränkung annehmen, dass die  $r$  unabhängige inf. Transformationen  $A_k f$  derart unter den  $(r-1)$ fach unendlich vielen Transformationen

$$c_1 A_1 f + c_2 A_2 f + \dots + c_r A_r f$$

gewählt sind, dass z. B.  $A_1 f$  und  $A_2 f$  in der Beziehung

$$A_1(A_2(f)) - A_2(A_1(f)) = c A_1 f$$

stehen, und dass dabei die Constante  $c$  entweder gleich Null oder auch gleich 1 ist. Dann befriedigen die beiden Transformationen  $A_1^0 f$  und  $A_2^0 f$  die entsprechende Gleichung

$$A_1^0(A_2^0(f)) - A_2^0(A_1^0(f)) = c A_1^0 f.$$

Nach meinen Untersuchungen über die Transformationsgruppen einer zweifach ausgedehnten Punkt-Mannigfaltigkeit können wir uns jetzt immer denken, dass die Variablen  $x'$  und  $y'$  derart gewählt sind, dass  $A_1^0 f$  und  $A_2^0 f$  die eine unter den vier folgenden canonischen Formen

$$a) \quad A_1^{(0)} f = \frac{df}{dx'}, \quad A_2^{(0)} f = y' \frac{df}{dx'}$$

$$b) \quad A_1^0 f = \frac{df}{dx'}, \quad A_2^0 f = x' \frac{df}{dx'}$$

$$c) \quad A_1^0 f = \frac{df}{dx'}, \quad A_2^0 f = \frac{df}{dy'}$$

$$d) \quad A_1^0 f = \frac{df}{dx'}, \quad A_2^0 f = x' \frac{df}{dx'} + y' \frac{df}{dy'}.$$

Ist

$$A_1^0 f = \frac{df}{dx'}, \quad A_2^0 f = y' \frac{df}{dx'},$$

so sind, werden wir nachweisen, die Curven  $y' = \text{Const.}$  die einzige auf unserer Fläche gelegene einfach unendliche Curvenschaar

$$\Omega(x' y') = \text{Const.}$$

die sowohl  $A_1^0 f$  wie  $A_2^0 f$  gestattet. Sollen nemlich zwei Relationen der Form

$$\frac{d\Omega}{dx'} = W_1(\Omega), \quad y' \frac{d\Omega}{dx'} = W_2(\Omega)$$

bestehen, so muss  $y'$  sicher eine Funktion von  $\Omega$ , und also zugleich  $\Omega$  eine Funktion von  $y'$  sein. Nun aber ist klar, dass die Haupttangentencurven unserer Fläche sowohl die Transformation  $A_1^0 f$  wie die Transformation  $A_2^0 f$  gestatten. Also schliessen wir, dass *alle* Haupttangentencurven durch  $y' = \text{Const.}$  dargestellt werden, und dass somit *nur eine* Haupttangentencurve durch jeden Punkt der Fläche hindurchgeht, woraus wieder folgt, dass die Fläche *developpabel* ist. Durch die inf. Transformation  $\frac{df}{dx'}$  (wie auch durch die Transformation  $y' \frac{df}{dx'}$ ) wird nicht allein die Schaar  $y' = \text{Const.}$  sondern zugleich jede Curve dieser Schaar in sich transformirt. Wenn aber eine lineare Transformation des Raumes alle gerade Linien einer Developpablen invariant lässt, so kann die zugehörige Rebroussementscurve, deren sämtliche Punkte sicher ihre Lage während der Transformation nicht ändern, keine gewundene Curve sein. Also ist entweder die Rebroussementscurve eben, und somit die betreffende Developpable eine ebene, oder auch reducirt die Rebroussementscurve sich zu einem Punkte, sodass die Developpable ein Kegel ist.

b) Sei jetzt

$$A_1^0 f = \frac{df}{dx'}, \quad A_2^0 f = x' \frac{df}{dx'}.$$

Dann sind, behaupte ich,  $x' = \text{Const.}$  und  $y' = \text{Const.}$  die einzigen auf der betreffenden Fläche gelegenen einfach unendlichen Curvenschaaren

$$\Omega(x' y') = a = \text{Const.},$$

deren jede sowohl die Transformation  $A_1^{(0)} f$  wie die Transformation  $A_2^{(0)} f$  gestattet, und somit zwei Relationen der Form

$$\frac{d\Omega}{dx'} = W_1(\Omega), \quad x' \frac{d\Omega}{dx'} = W_2(\Omega)$$

erfüllt. Diese beiden letzten Relationen verlangen nemlich entweder dass  $x'$  eine Funktion von  $\Omega$ , und also gleichzeitig  $\Omega$  eine Funktion von  $x'$  ist, oder auch dass  $\Omega$  nur von  $y'$  abhängt, womit die Richtigkeit unserer Behauptung erwiesen ist. Schliessen wir daher die developpablen Flächen von unserer Betrachtung aus, so ist  $x' = \text{Const.}$  die Gleichung der einen Schaar Haupttangentialcurven, und  $y' = \text{Const.}$  die Gleichung der zweiten Schaar.

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen werden wir, indem wir mit  $a_0$  eine beliebige Constante bezeichnen, die infinitesimale Transformation

$$A_2^0 f - a_0 A_1^0 f = (x' - a_0) \frac{df}{dx'}$$

betrachten. Bei derselben bleibt die Haupttangentialcurve  $x' = a_0$  invariant, und überdies behalten alle ihre Punkte ihre Lage ungeändert. Wenn aber alle Punkte einer Curve bei einer linearen Transformation des Raumes invariant bleiben, so ist die Curve eben, und da  $x' = a_0$  ausserdem eine Haupttangentialcurve sein soll, so muss sie eine *Gerade* sein. Es ist auf der anderen Seite ebenfalls leicht zu beweisen, dass auch jede Haupttangentialcurve  $y' = b_0$  geradlinig sein muss.

Denn, wäre die Curve  $y' = b_0$  gewunden, so könnte man zuerst in einem arbiträren Punkte  $p$  derselben die zugehörige Osculationsebene construiren, und darnach den Schnittpunkt  $\pi$  dieser Ebene mit der Geraden  $x' = a_0$  bestimmen. Führt man sodann die inf. Transformation  $A_2^0 f - a_0 A_1^0 f$  aus, so bliebe jeder Punkt der Geraden  $x' = a_0$ , insbesondere auch der Punkt  $\pi$  invariant und da nicht alle Punkte  $p$  der Curve  $y' = b_0$  bei unserer Transformation invariant bleiben dürfen, so müssen *alle* Osculationsebenen der soeben besprochenen Curve durch den gemeinsamen Punkt  $\pi$  gehen. Hiermit sind wir indess auf Contradictio geführt. Und also muss die Curve  $y' = b_0$  eben und als Haupttangentialcurve geradlinig sein, wie behauptet wurde. Die Annahme

$$A_1^0 f = \frac{df}{dx'}, A_2^0 f = x' \frac{df}{dx'}$$

führt somit entweder auf *Flächen zweiten Grades* oder auch auf *develloppable Flächen*\*).

c) Die Annahme

$$A_1^{(0)} f = \frac{df}{dx'}, A_2^{(0)} f = \frac{df}{dy'}$$

liefert die von *Klein* und mir untersuchten Flächen mit zwei permutablen linearen und infinitesimalen Transformationen. Es ist bekanntlich möglich in allgemeinster Weise zwei per-

---

\*) Im letzten Falle giebt es nur eine Schaar (geradlinige) Haupttangentialcurven, die entweder durch  $x^1 = \text{Const.}$  oder durch  $y^1 = \text{Const.}$  dargestellt werden. Ist  $y^1 = \text{Const.}$  die Gleichung der geradlinigen Haupttangentialcurven, so sieht man wie früher ein, dass alle diese Gerade einen Kegel bilden. Ist  $x^1 = \text{Const.}$  die Gleichung der geraden Linien der develloppablen Fläche, so müsste die Rebroussementscurve sowohl durch  $A_1^0 f$  wie durch  $A_2^0 f$  in sich transformirt werden und somit eine Curve dritter Ordnung sein. Es ist indess leicht zu verificiren, dass die Develloppable einer Curve dritter Ordnung nicht zwei infinitesimale, lineare Transformationen der typischen Form  $\frac{df}{dx'}, x' \frac{df}{dx'}$  gestattet.

mutable lineare und infinitesimale Transformationen  $A_1 f, A_2 f$  aufzustellen; darnach findet man die Integralflächen des vollständigen Systems

$$A_1 f = 0, A_2 f = 0$$

durch zwei Quadraturen, die sich überdies ausführen lassen.

a) Zurück steht jetzt nur noch die Annahme

$$A_1^{(0)} f = \frac{df}{dx'}, A_2^{(0)} f = x' \frac{df}{dx'} + y' \frac{df}{dy'}.$$

Dieselbe liefert eine Reihe, im Allgemeinen transcendente und nicht developpable Flächen. Zur Bestimmung derselben sucht man in allgemeinsten Weise zwei lineare inf. Transformationen des Raumes  $A_1 f, A_2 f$ , die in der Beziehung

$$A_1 (A_2 (f)) - A_2 (A_1 (f)) = A_1 f$$

stehen und dabei keine Relation der Form

$$A_2 f = \lambda (x y z) A_1 f$$

erfüllen. Diese Bestimmung kann immer ausgeführt werden. Darnach bestimmt man die Integralflächen des vollständigen Systems

$$A_1 f = 0, A_2 f = 0$$

durch zwei Quadraturen, die sich immer ausführen lassen. Die hiermit gefundenen Flächen gestatten selbstverständlich die beiden inf. Transformationen  $A_1 f$  und  $A_2 f$ .

Zu den obenstehenden Entwicklungen, die einen einfachen Weg zur Auffindung aller Flächen mit zwei oder mehreren linearen und infinitesimalen Transformationen geben, fügen wir noch die folgenden Bemerkungen.

Sucht man alle Flächen, die eine vorgelegte lineare und infinitesimale Transformation  $Af$  gestatten, so braucht man nur die lineare partielle Differentialgleichung  $Af = 0$  zu



integriren. Jede Integralfäche derselben erfüllt die gestellte Forderung.

Sieht man von den developpablen Flächen weg, so giebt es auf jeder Fläche mit linearen infinitesimalen Transformationen sicher zwei einfach unendliche Curvenschaaren, die beiden Schaaren Haupttangentialcurven, die durch die betreffende Transformation in sich transformirt werden. Hieraus folgt, wenn  $x' = \text{Const.}$  und  $y' = \text{Const.}$  die Gleichungen der Haupttangentialcurven sind, dass alle Transformationen, die wir früher mit dem Symbole  $A_k^0 f$  bezeichnet haben, die Form

$$A_k^0 f = \xi_k(x') \frac{df}{dx'} + \eta_k(y') \frac{df}{dy'}$$

besitzen. Berücksichtigt man daher meine Bestimmung aller Transformationsgruppen, (die zwei einfach unendliche Curvenschaaren der betreffenden Ebene invariant lassen), und erinnert gleichzeitig, dass die Annahme  $A_1^0 f = \frac{df}{dx'}$ ,  $A_2^0 f = x' \frac{df}{dx'}$  nur developpable Flächen und Flächen zweiten Grades liefert, so erkennt man, dass eine nicht developpable Fläche, die überdies nicht vom zweiten Grade ist, nie mehr als drei lineare und infinitesimale Transformationen  $A_1 f$ ,  $A_2 f$ ,  $A_3 f$  gestatten kann und findet überdies, dass die entsprechenden Transformationen  $A_k f$  entweder die Form

$$\left. \begin{aligned} A_1 f &= \frac{df}{dx'} + \frac{df}{dy'} \\ A_2 f &= x' \frac{df}{dx'} + y' \frac{df}{dy'} \\ A_3 f &= x'^2 \frac{df}{dx'} + y'^2 \frac{df}{dy'} \end{aligned} \right\}$$

oder die Form

$$\left. \begin{aligned} A_1^0 f &= \frac{df}{dx'}, & A_2^0 f &= \frac{df}{dy'} \\ A_3^0 f &= x' \frac{df}{dx'} + y' \frac{df}{dy'} \end{aligned} \right\}$$

erhalten können. Wir werden untersuchen, ob es wirklich Flächen giebt, welche die gestellten Forderungen erfüllen.

Wir bemerken zunächst, dass jede Haupttangentencurve einer solchen Fläche durch *zwei* unabhängige lineare inf. Transformationen der Form

$$C_i f = k_1 A_1 f + k_2 A_2 f + k_3 A_3 f \quad (i = 1, 2)$$

in sich transformirt wird, und dass sie in Folge dessen eine Curve dritter Ordnung (oder eine Gerade) ist\*). Da die inf. Transformationen  $C_1 f$  und  $C_2 f$  sicher eine Gruppe bestimmen, so giebt es auf der besprochenen Curve 3. O. *ein* Punkt  $P$ , der bei allen Transformationen der Form  $c_1 C_1 f + c_2 C_2 f$  ihre Lage behält. Eine bestimmte Transformation der Form  $c_1 C_1 f + c_2 C_2 f$  lässt im Allgemeinen zwei Punkte der Curve, unter denen  $P$  der eine ist, invariant. Bei einer solchen Transformation behält daher im Allgemeinen ein *nicht ausgeartetes* Tetraeder ihre Lage. Durch zweckmässige Variation des Verhältnisses  $\frac{c_1}{c_2}$ , kann man übrigens erreichen, dass die vier Ecken dieses Tetraeders einandern unendlich nah rücken und zuletzt in  $P$  zusammenfallen.

Lass uns jetzt einen Punkt allgemeiner Lage unsere Fläche wählen, und lass uns die beiden hindurchgehenden Haupttangentencurven betrachten. Dann giebt es eine und nur eine inf. Transformation der Form  $m_1 A_1 f + m_2 A_2 f + m_3 A_3 f$  welche den gewählten Punkt und folglich zugleich die beiden hindurchgehenden Haupttangentencurven invariant

---

\*) Hieraus folgt unmittelbar, dass jede Fläche die unsere Forderungen erfüllt, sicher algebraisch ist.

lässt. Seien  $p = 0$ ,  $q = 0$ ,  $r = 0$ ,  $u = 0$  die vier Seitenflächen desjenigen nicht ausgearteten Tetraeders, das bei der betreffenden Transformation un geändert bleibt, und sei die Ecke ( $p = 0$ ,  $q = 0$ ,  $r = 0$ ) der gewählte Punkt unserer Fläche. Setzen wir dann

$$\frac{p}{u} = x, \quad \frac{q}{u} = y, \quad \frac{r}{u} = z,$$

so hat die betreffende infinitesimale Transformation die Form

$$\frac{x}{m} \frac{df}{dx} + \frac{y}{n} \frac{df}{dy} + \frac{z}{p} \frac{df}{dz},$$

und dabei sind die Constanten  $m$   $n$   $p$  positive und verschiedene ganze Zahlen, indem nemlich unsere beiden Haupttangentialcurven, die Integralcurven des simultanen Systems

$$m \frac{dx}{x} = n \frac{dy}{y} = p \frac{dz}{z}$$

darstellen, nach dem Vorgehenden Curven dritter Ordnung sind. Unsere beiden Haupttangentialcurven haben somit die gemeinsame Gleichungsform

$$Ax^m = By^n = Cz^n$$

wo wir annehmen können, dass

$$m > n > p$$

ist. Und also haben die durch den Punkt  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  gehenden Haupttangentialcurven eine gemeinsame Tangente, nemlich die Gerade  $z = 0$ ,  $y = 0$ . Nun aber ist der Punkt  $x = y = z = 0$  ein Punkt allgemeiner Lage unserer Fläche, deren durch den betreffenden Punkt gehenden Haupttangentialcurven somit sicher zusammenfallen. Hiermit sind wir indess auf Contradictio geführt.

In dieser Weise erhalten wir den folgenden nicht unwichtigen Satz:

*Gestattet eine Fläche mehr als zwei unabhängige, lineare und infinitesimale Transformationen, so ist sie entweder ein Kegel, oder eine Fläche zweiten Grades oder endlich die Developpable einer Raumcurve dritter Ordnung.*

Führt man auf eine Fläche alle  $\infty^{15}$  lineare Transformationen des Raumes aus, so erhält man im Allgemeinen  $\infty^{15}$  verschiedene Flächen. Wenn indess die vorgelegte Fläche eine oder mehrere, etwa  $q$  unabhängige lineare und infinitesimale Transformationen gestattet, so erhält man nur  $\infty^{15-q}$  Flächen. Die vorangehenden Entwicklungen zeigen, wie man alle möglichen Fälle bestimmen kann.

Führt man andererseits alle Transformationen einer in der allgemeinen linearen Gruppe enthaltenen Untergruppe, die etwa  $m$  Parameter enthält, auf eine vorgelegte Fläche aus, so erhält man im Allgemeinen  $\infty^m$  verschiedene Flächen. Wenn jedoch die vorgelegte Fläche  $q$  in der Untergruppe enthaltenen infinitesimale Transformationen gestattet, so erhält man nur  $\infty^{m-q}$  verschiedene Flächen.

Lass uns insbesondere diejenige Untergruppe mit 7 Parametern betrachten, die von allen Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen gebildet wird. Und lass uns alle Flächen suchen, die durch Ausführung aller Transformationen dieser Gruppe nicht mehr als  $\infty^4$  verschiedene Lagen erhält. Eine solche Fläche muss drei lineare Transformationen der besprochenen Untergruppe gestatten, und ist daher entweder ein Kegel oder eine Developpable einer Curve dritter Ordnung oder eine Fläche zweiten Grades. Es giebt aber keine Curve 3. O. mit drei linearen inf. Transformationen, die den Kugelkreis invariant lassen. Soll andererseits ein Kegel drei solche infinitesimale Transformationen gestatten, so muss sie eine Punktkugel sein; eine Punktkugel erhält indess durch Ausführung aller Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen nicht einmal  $\infty^4$  sondern nur  $\infty^3$  verschiedene Lagen.

Also muss die Fläche vom zweiten Grade sein, und wie man leicht einsieht, insbesondere eine gewöhnliche Kugel.

Die soeben erledigte Frage kann übrigens direkt in folgender Weise beantwortet werden. Gestattet eine Fläche  $\infty^3$  lineare Transformationen, die den Kugelskreis invariant lassen, so muss sie insbesondere  $\infty^2$  (oder  $\infty^3$ ) Bewegungen gestatten. Lass uns zunächst annehmen, dass diese Bewegungen sämmtlich Rotationen sind. Dann weiss man, dass  $\infty^2$  (oder  $\infty^3$ ) Rotationen, die eine Gruppe bilden, immer Rotationen um einen festen Punkt sind, und also ist die betreffende Fläche eine Kugel. Gestattet eine Fläche eine Gruppe von  $\infty^2$  oder  $\infty^3$  Bewegungen, unter denen sich eine oder mehrere Translationen finden, so ist die Fläche entweder eine Ebene oder eine Cylinderfläche. Eine Ebene erhält indes durch alle lineare Transformationen nur  $\infty^3$  Lagen. Eine Cylinderfläche dagegen erhält durch Ausführung aller Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen jedenfalls  $\infty^5$  verschiedene Lagen, dabei vorausgesetzt dass die Cylinderfläche nicht in einen Rotationencylinder mit unendlich kleinem Radius, das heisst in eine gerade Linie ausgeartet ist.

*Die Kugel ist daher die einzige Fläche, die durch Ausführung aller Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen  $\infty^4$  und nur  $\infty^4$  verschiedene Lagen erhält.*

Soll eine Raumcurve durch Ausführung aller Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen  $\infty^4$  und nur  $\infty^4$  verschiedene Lagen erhalten, so muss sie jedenfalls durch  $\infty^2$  Bewegungen, unter denen zwei infinitesimal sind, in sich übergeführt werden. Nun aber ist klar, dass eine *krumme* Curve, deren Bogenlänge von Null verschieden ist, nie mehr als *eine* infinitesimale Bewegung gestattet. Und eine krumme Curve  $ds = 0$ , die zwei infinitesimale Bewegungen gestattet, ist eine Curve dritter Ordnung, deren Developpable den Kugelskreis enthält; und eine solche Curve gestattet offenbar



keine dritte lineare inf. Transformation, die den Kugelkreis invariant lässt. Die gerade Linie ist daher die einzige Curve, die unsere Forderungen erfüllt.

*Die gerade Linie ist die einzige Curve, die durch alle Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen des Raumes  $\infty^4$  und nur  $\infty^4$  verschiedene Lagen erhält.*

Die beiden letzten Sätze zeigen, dass die *Plückersche* Liniengeometrie und die vom Verfasser begründete Kugelgeometrie eine ausgezeichnete Stellung einnehmen unter den unbeschränkt vielen Weisen, in denen man im *Plückerschen* Sinne einen vierfach ausgedehnten Raum construiren kann.

*Führt man daher eine Fläche oder eine Curve mit vier Parametern als Punkt eines vierfach ausgedehnten Raumes ein und verlangt dabei, dass dieser Raum alle Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen des dreifach ausgedehnten Punktraumes gestatten soll, so erhält man entweder die Plückersche Liniengeometrie oder auch die neue Kugelgeometrie.*

Hierzu kommt, dass die Liniengeometrie alle  $\infty^{15}$  lineare Transformationen des dreifach ausgedehnten Raumes gestattet, und dass die Kugelgeometrie  $\infty^{15}$  Berührungstransformationen gestattet, die Krümmungslinien des dreifach ausgedehnten Raumes invariant lassen; und endlich dass die Liniengeometrie nach mir durch eine Berührungstransformation in die Kugelgeometrie übergeführt werden kann.

---

\*) Hier noch die folgenden Bemerkungen. Wenn eine Differentialgleichung eine Transformationsgruppe mit einer begrenzten Zahl Parametern gestattet, so ist es immer möglich die vorgelegte Gleichung durch eine oder mehreren Relationen zwischen gewissen canonischen Grössen zu ersetzen, welche durch die Gruppe bestimmt sind. Die Bestimmung dieser *canonischen Variablen* ist immer möglich, wenn man ein durch die Gruppe bestimmtes vollständiges System integrirt hat. Ich behalte mich vor diese Theorie, die allerdings fast unmittelbar aus dem Begriffe Transformationsgruppe hervorgeht, baldigst näher zu entwickeln. Handelt es sich um Systemen von linearen partiellen Differential-

gleichungen, so erreicht man in dieser Weise keine grössere Erniedrigung in der Ordnung der nothwendigen Integrationen als von mir *längst* in anderer Weise erzielt wurde. Dagegen vermeidet man in dieser neuen Weise gewisse Parameter. Hierbei ist indess wohl zu bemerken, dass diese neue Methode erst dann angewandt werden kann, wenn die canonicen Variabeln durch Integration des Hülfsystems bestimmt sind. Diese Integration ist als geleistet zu betrachten, wenn die *endlichen* Gleichungen der Transformationsgruppe gegeben sind.

Juni 1882.

---

## Alte Strandlinien und glaciale Schliff-flächen im Strandgürtel.

von

S. A. SEXE.

---

Wie bekannt, findet man in unserem Vaterlande fossile Salzwasserschalthiere (Seemuscheln) bis zu einer Höhe von 600 Fuss oder 180 Meter über dem gegenwärtigen Meerespiegel. Zu der Zeit, wo diese Schalthiere in solcher Höhe lebten, stand also das Meer relativ zum Lande 188 Meter höher als jetzt. Ob diese Niveauverrückung dadurch zustande gekommen ist, dass das Land um 188 Meter gehoben wurde, oder dadurch, dass das Meer um 188 Meter sich gesenkt hat, oder dadurch, dass das Land um  $x$  Meter emporstieg und das Meer um  $y$  Meter sank (während  $x + y = 188$  Meter), lässt sich im Grunde zur Zeit nicht festsetzen, man nimmt indessen bekantlich an, dass das Land um 188 Meter gestiegen ist. Ueber die Art und Weise dieser Steigung, oder genauer gesprochen, über die Art und Weise, in welcher die Durchschnittslinie zwischen der Meeresfläche und der festen Oberfläche der Erde sich aus ihrer früheren Lage nach der gegenwärtigen Position hin bewegt hat, herrschen, wie ebenfalls bekannt, immer noch verschiedene Meinungen, unter andern die, dass letztere Bewegung sprunghaft, also mit dazwischenliegenden, wenn auch nicht besonders langen, Ruhepausen vorsichgegangen sei.

Für die Annahme solcher Pausen in der Steigung beruft man sich auf die sogenannten alten Strandlinien in festem Gestein, während die horizontalen Zonen, in welchen keine Strandlinien sich finden, als Argument für den sprungweisen Charakter der betreffenden Bewegung zu gelten haben. Man schliesst nämlich so: Strandlinien sind Furchen, welche das Meer in dem festen Gestein in der Höhe seines dermaligen Niveaus ausgenagt hat. Eine solche Wirkung hätte das Meer nicht ausüben können, es sei denn, dass die einstige Uferlinie längere Zeit in der Lage verweilt hat, welche durch die erodirte Strandlinie bezeichnet wird. Dagegen muss jene Uferlinie rasch über die Zonen hinweggesprungen sein, wo solche Strandlinien nicht zu sehen sind.

Es liegt ja nun freilich nahe, die — wenigstens für das Augenmass — horizontalen Strandlinien mit einem stationären Meeresspiegel in Verbindung zu bringen, und was ist dann natürlicher als an eine Erosion der Uferklippen durch das Meer zu denken. Für einen solchen Vorgang lassen sich ja auch in der That verschiedene Gründe anführen. Es besitzt ohne Zweifel das Meereswasser ein grösseres oder geringeres Auflösungsvermögen für die verschiedenen Gesteine. Man sieht ferner noch heut, wie die Wellen an gewissen Punkten und zu gewissen Zeiten Sand, Kies und Steine fortwährend über dieselben Klippen hin und her spülen, und letztere dadurch abschleifen. Endlich hat man auch darauf zu achten, dass die Uferfelsen beim Ebben und Fluthen der See abwechselnd mit Medien von sehr verschiedener Temperatur in Berührung kommen. Namentlich scheint es sich von selbst zu verstehen, dass das Gestein in solchen Zeiten, wo die Lufttemperatur unter  $0^{\circ}$  herabgesunken ist, wenn dasselbe so abwechselnd bald mit dem Seewasser, bald mit der Atmosphäre in Berührung tritt, durch den Frost zersprengt werden muss.

Gegen diese Beweisführung ist jedoch verschiedenes zu

erinnern. Einmal haben wir zu bedenken, dass der Gefrierpunkt des Salzwassers niedriger liegt, als der des Süßwassers und mit dem Steigen des Salzgehaltes noch tiefer herabgedrückt wird. Eine solché Vermehrung des Salzgehaltes im Meereswasser tritt aber bei starker Kälte wahrscheinlich ein, nicht bloss dadurch, dass sich die See mit Eis belegt, sondern auch dadurch, dass durch das Gefrieren der Flüsse und Bäche die Zufuhr von süßem Wasser vermindert wird, während gleichzeitig die Atmosphäre ihren Niederschlag nur in fester Form liefert. Alle diese Momente erschweren das Gefrieren des Seewassers, im Vergleich mit dem Süßwasser, und legen somit dem Zerfrierungsprocess einen Dämpfer auf. Dazu kommt aber noch ein weiterer Umstand. Wenn die eisbelegte See bei der Ebbe fällt, so folgt das Eis, welches mit dem Strande in Berührung steht, dem Wasser bei seinem Sinken nur dann, wenn die Abhänge der Ufer sehr steil sind. Im entgegengesetzten Fall legt sich aber das Eis beim Zurückweichen des Wassers über den Strand, der durch diese Bedeckung feucht erhalten und gegen den Einfluss des Frostes bewahrt bleibt, bis der Einbruch der neuen Fluth einen solchen Schutz unnöthig macht. Schliesslich darf aber auch der Umstand nicht übersehen werden, dass gleichzeitig mit der Erosion des Gesteines in der Uferlinie oder in dem vom Meere bespülten Gürtel, — wie man nun auch diesen Vorgang im Einzelnen sich vorstellen mag, — eine Verwitterung des Gesteines oberhalb der angegebenen Zone stattfindet, und dass deshalb die Bildung einer Strandlinie in der angegebenen Weise nur unter der Bedingung möglich ist, dass die Erosion rascher fortschreitet, als die Verwitterung.

Gegen die Hypothese, nach welcher unsere alten Strandlinien in festem Gestein als Resultate einer erodirenden Wirkung des Meeres, und somit auch als Beweise für die zu solcher Arbeit nothwendigen Pausen im Aufsteigen des Landes gelten sollen, habe ich schon mehrfach Einspruch erhoben



und dabei besonders auf den Umstand hingewiesen, dass das Meer, wenn es wirklich im Stande gewesen wäre, solche Andenken an den Stand seiner einstigen Niveaus in die Felsen einzugraben, doch auch in derselben Weise seinen gegenwärtigen Stand habe notiren müssen, nach dem derselbe, wie man wohl annehmen darf, zum Wenigsten die letzten 1000 Jahr hindurch sich stationär erhalten hat. Eine neue Strandlinie d. h. eine Erosionsfurche im gegenwärtigen Meeresniveau ist indessen auf unserer Küste nicht nachgewiesen. Dagegen findet man ein anderes Phänomen, und zwar ein solches, das man, von jenem dem Meere zugesprochenen Erosionsvermögen ausgehend, am wenigsten erwarten würde, — ich meine: Spuren glacialer Bearbeitung, Friktionsstreifen und Schrammen.

Indicien einer Scheuerung durch Gletscher, zumal Scheuerungsstreifen, habe ich oft gelegentlich an unserer Küste beobachtet, und ich meinte bemerken zu können, dass diese Streifen in Strandgürtel frischer aussähen und besser conservirt wären, als oberhalb desselben. Im Lauf des vergangenen Sommers habe ich einige Exkursionen express mit der Absicht unternommen, um zu untersuchen, wie es hier in der Umgegend von Christiania, sowohl auf dem festen Lande, als auf einigen der benachbarten Inseln, sich mit derartigen Erscheinungen verhalten möge.

Von Gletschern eingescheuerte Streifen kommen im Ganzen in der Umgegend Christianias nicht selten vor. Auf dem offen zu Tage liegenden Thonschiefer sind indessen wohlerhaltene Friktionsschrammen selten. Weniger selten sind sie auf der flachen Seite der in Wechsellagerung mit Thonschiefer auftretenden Kalkschichten oder kalkreicheren Schichten. Sehr häufig kommen dieselben jedoch auf den krystallinischen Gebirgsarten unseres Gebietes vor. Als Punkte, wo ich im Strandgürtel deutliche und unverkennbare glaciale Scheuerungsstreifen angetroffen habe, kann ich nennen: die

Westseite des Felsens unter der Festung Akershuus; die Westseite von Tyveholmen, das grosse Brandskjär; Kawringen; Dyna, wo das Leuchtfeuer steht, sowie Kobbernaglen. Ferner habe ich solche beobachtet: an 7 Punkten im Strandgürtel um Nakholmen, an 22 do. in do. um Lindöen, an 18 do. in do. um Hovedöen, an 6 do. in do. um Gräsholmen, an 3 do. in do. um Hegholmen, besonders an der Klippe auf welcher das Leuchtfeuer steht, an 3 do. in do. um Rambergöen; an 23 do. in do. um Bleköen; an 7 do. in do. um das nördliche Langöen; an 5 do. in do. an der Nordseite des südlichen Langöen; an 4 do. an derselben Seite von Malmöen; an 8 do. auf derselben Seite von Örmöen; an 9 do. an der Nordseite von Sjursöen; ferner 5 do. am Strande zwischen Kongshavn und Grönlien, so wie auf einem Skjär (Klippe im Meere) bei Grönlien; im Ganzen an 127 Punkten. Was die Inseln betrifft, die ich umfahren habe, so kommen glaciale Friktionstreifen am häufigsten vor an der Nordseite, der Stossseite, am seltensten auf der entgegengesetzten, der geschützten Leeseite, bei welcher Gelegenheit bemerkt werden mag, dass ich keine Friktions-indicien auf der Südseite von Sjursöen habe sehen können, und dass ich die Südseite vom südlichen Langöen, von Malmöen und von Örmöen nicht befahren habe. Obwohl Thonschiefer, (der sogenannte Skalberg), mit Ausnahme des Strandstückes zwischen Kongshavn und Grönlien, in dem von mir untersuchten Gebiet weitaus die verbreitetste Gebirgsart darstellt, so fallen doch nur 49 von den 127 mit Gletscherstreifen gezeichneten Punkten auf das Thonschieferfeld, während 78 auf die sporadischen, in Bezug auf Areal unbedeutenden, Parthien krystallinischer Bergarten fallen.

Wenn man nun auch sagen wollte, dass der Zeitraum, — mindestens 1000 Jahr, während dessen das Meer in seinem gegenwärtigen Niveau geblieben ist, — zu kurz gewesen wäre, um eine Strandlinie zu erzeugen, so lässt sich ja doch

wohl kaum behaupten, dass dieser Zeitraum auch noch zu kurz gewesen sein sollte für die Ausglättung der glacialen Friktionsstreifen im Strandgürtel, was ja eben doch nur die allererste Einleitung zur Bildung einer Strandlinie gewesen wäre; denn — wohl zu merken — hier ist ja nicht die Rede von tiefen Gletscherfurchen, sondern nur von oberflächlichen Schrammen und dünnen Strichen auf der Oberfläche des Gesteins.

Die glacialen Schrammen und Ritzen in der gegenwärtigen Strandzone des Landes sind also schon durch ihre blosse Existenz ein Protest gegen die Lehre von der Erosion unserer sogenannten alten Strandlinien durch die Einwirkung des Meeres, aber somit auch gegen die damit zusammenhängende Annahme von Ruhepausen in dem Aufsteigen des Landes.

---

# Om Islands Jøkler og om Jøkelelvenes Vandmængde og Slamgehalt

af

AMUND HELLAND.

---

## I. Om Jøklerne.

De fleste Geologer, som har besøgt Island, har fortrinsvis beskæftiget sig med Vulkanerne og de vulkanske Bergarter, medens Jøklerne saa godt som slet ikke er undersøgte i den senere Tid, og dog findes Europas største Bræer paa denne Ø. Islændingen *Sveinn Pálsson*, der reiste i Slutningen af forrige Aarhundrede, har leveret en Monografi i Manuskript af de islandske Bræer, (Forsøg til en physisk, geografisk og historisk Beskrivelse over de islandske Isbjerger), og dette Arbeide er ved Siden af *Gunnlaugssons* Kart Hovedkilderne til vort Kjendskab til Islands Bræer.

Man maa forat danne sig et Begreb om Islands Bræer først gjøre sig fortrolig med deres Dimensioner, og her tilbyder sig naturligen *Justedalabræen* og *Folgefonn* til Sammenligning. *Vatnajökull* er over 10 Gange saa stor som *Justedalabræen*, der er den største Ismark paa det europæiske Fastland. Men Island har ikke mindre end 5 Jøkler, som er større end *Justedalabræen*, saaledes som det vil sees af nedenfor anførte Tal. Vi ordner Bræerne efter Størrelsen og tilføier Høiderne.

	Kvadratmil.	Kvadratkilometer.	Høide i Fod.
Vatnajøkull . . . . .	150	— 8510	— 6241
Lángjøkull . . . . .	26	— 1475	— 4500
Hofsjøkull . . . . .	25	— 1418	— ?
Mýrdalsjøkull . . . . .	18	— 1021	— 5432
Drángajøkull . . . . .	15	— 851	— 2800
Glámujøkull . . . . .	8	— 454	— 2800
Torfajøkull . . . . .	2	— 113	— ?
Eyriksjøkull . . . . .	2	— 113	— 5730

Mindre Jøkler er Snæfellsjøkull og Tungnafellsjøkull.

Til Sammenligning hidsættes

Justedalsbræ . . . . .	14.6	— 830	— 6495
Folgefonn . . . . .	4.9	— 280	— 5260

Disse Tal vil være tilstrækkelige til at give et Begreb om Dimensionerne af Islands Jøkler; de overgaar, som vi ser, i Størrelse langt alle Ismasser paa det europæiske Fastland, om de end ingen Sammenligning taaler med Grønlands uhyre Indlandsis.

Vi vil her foreløbigt beskæftige os med selve Bræerne, idet vi i senere Afsnit omtaler de fra Bræerne kommende Jøkeelve. Under flere af Islands Jøkler skjuler der sig Vulkaner, og naar disse har Udbrud indtræder der ved Samspillet mellem Jøklernes Is og de udkastede glødhede Masser eiendommelige og storartede Fænomer, de saakaldte *Jökulhlaup*. Disse vulkanske Fænomer skal imidlertid omtales andetsteds.

*Vatnajøkull*, Europas største Ismark, har faaet sit Navn af de talrige Elve, som søger ud fra Isen, men den kaldes ogsaa *Klofajøkull* paa Grund af de mange Arme, som den sender ned i de omliggende Egne. Kun en Mand, Englænderen *Watts*, har vandret over Jøkullen, og han angiver dens Høide til 5000 Fod i den midtre Del, men paa Jøkullens sydligste Del, i den saakaldte *Öræfajøkull*, naar Island sin høieste Elevation, nemlig 6241 Fod. Jøkullen ligger i Lan-



dets sydøstlige Del og har i det hele en elliptisk Figur med den lange Axe omtrent i øst-vestlig Retning. Mange Bræer og mange Elve næres af denne Jøkull, saaledes som dens to Navne angiver. Vulkaner eller Steder, hvor der har været iagttaget vulkanske Udbrud under Jøkullen, findes, men er lidet kjendte. Saameget er imidlertid sikkert, at vulkanske Udbrud med ledsagende Jøkulhlaup har fundet Sted i *Þræfajøkull* i Aarene 1341, 1362, 1598, 1727. Fremdeles angives Udbrud fra *Síðujøkull*, en Del af Vatnajøkull, i 1389 og i 1753, fra *Grimsvøtn* i 1598, 1685 og 1716, ligesom fra *Skeiðarárjøkull* i 1681, 1725, 1727, 1774, 1784. Imidlertid er det et Spørgsmaal om Udbrudsstedet for *Grimsvøtn* og i *Skeiðarárjøkull* i Virkeligheden repræsenterer to særskilte Udbrudssteder. Saameget er sikkert, at Vulkaner holder til paa flere Steder under Isen.

*Vatnajøkull* er Kilden for Islands fleste og største Elve, men paa Grund af Beliggenheden i den sydøstlige Del af Landet bliver Elvene mod Nord (og Vest) lange, de mod Syd (og Øst) korte. Paa Sydsiden af Jøkullen ifra *Lómagnúpr* og østover imod *Hornafjorðr* er Jøkullen adskilt fra Havet kun ved en smal Rand af Land, der for en væsentlig Del indtages af Sande. Jøkullens Nordside støder op mod det store *Oðaðahraun* og andre øde Strækninger og er saare lidet kjendt. At opregne og nærmere omtale alle de Bræer, som udsendes fra Vatnajøkull, er fortiden ikke muligt, da de ikke alle er kjendte. Her maa vi derfor kun forsøge paa at faa en Oversigt over de vigtigste af de kjendte Bræer, idet vi begynder østligst.

Den østligste Udligger af det store Jøkelfelt er *Þrándarjøkull*, et høit, fladt, isdækket Fjeld imellem *Hamarsdalr* og *Gjeithellnadalsr*, helt adskilt ifra Vatnajøkull ved den sidstnævnte Dal.

Ned imod Dalene i *Hornafjorðr* søger 3 Bræer fra Vatnajøkull, hver Bræ i sit Dalføre, den østligste kaldes *Hoffells-*

*jökull*, den vestligste *Viðborðsjökull*, men den tredie fører ikke særskilt Navn. Det er Elvene fra disse tre Jøkler, som har udfyldt Hornafjørðr i den Grad, at man kan ride over den.

Længer vest ligger *Holmsájökull* og den store *Heinabergsjökull*, hvilke er mægtige Bræer, der gaar skjoldformede ud imod Sanden, og efter Øiesyn er Mægtigheden vistnok over 500 Fod. Foran ligger Sandstrækninger som ved de senere omtalte, meget store Bræer.

Vestenfor disse Bræer igjen ligger *Kalfafellsjökull*, og for en af disse fik jeg opgivet Navnet *Hálsjökull*; den sees øst for Kalfafell, sendende en liden Arm ned mod Dalen; men vest for Kalfafell ligger der en Bræ, hvis Navn angaves at være *Brogarjökull*, og som vistnok har udfyldt en gammel Fjord. Disse Jøkler er ikke nærmere undersøgte, men man ser dem paa Reisen langs Islands Sydkyst. Underlaget for den østlige Del af Vatnajökull og dens ovenfor nævnte Udløbere er Basaltbænke, og Landet har her Dalfører af forholdsvis liden Bredde, hvori Jøklerne ligger; dog gaar som omtalt *Heinabergsjökull* bred og hvælvet ned imod Sanden, hvorved den faar Lighed med de senere nævnte, meget store Bræer som *Breiðamerkrjökull* og *Skeiðarárjökull*, der træder længer vest, hvor Palagonittuf danner Underlaget for Isen.

*Breiðamerkrjökull* gaar ud imod den øde Breiðamerkr-sandr med en Bredde paa omtrent 24 Kilometer, og ligger her som en stor Iskage over Sanden i ringe Afstand fra og i ringe Høide over Havet. Randen af Isbræen fandtes ved *Jökulsá á Breiðamerksandi* at ligge 67 Fod over Havet, en anden Iagttagelse længer Øst gav 35 Fod over Havet, hvorved maa erindres, at Maalinger af saa smaa Høider, naar Observationerne skal udregnes ved Hjælp af isobariske Linier, ikke bliver meget nøiagtige. Mere end 20 Meter over Havet ligger imidlertid neppe den nederste Del af Breiðamerkr-

jøkull. Paa hele denne lange Strækning af 24 Kilometer ligger Bræen over Sanden, stigende indover, saa at den vistnok snart faar en betydelig Mægtighed paa 100 til 150 Meter og mere. Flere Midtmoræner, hvoraf 3 store, iagttoges, og de antyder, at hele den brede Ismasse dannes ved Forening af flere Bræer, hver i sit Dalføre. Foran Jøkullen imellem denne og den flade Sand ligger flere Endemoræner, og bag disse undertiden smaa opdæmmede Søer. Tragtformede Huller, der svarer til det, Svenskerne kalder Aasgroper, saaes foran Moræneern med et Par Meters Diameter. Bræen synes i det hele i 1881 snarere at tage af end at tage til, og hermed stemmer, hvad Folk paa Reynivellir fortalte, at Jøkullen for 6 til 7 Aar siden gik længer frem, var høiere og uslettere, med flere Topper og Ujævnheder. Overhovedet er disse Omgivelser ved Breiðamerkrjökull udsatte for daglige Omskiftelser, Bræen flytter sig, Elvene veksler Løb over Sanden, og denne flyttes ved Elvens skiftende Løb, og længer ud bryder stadigt Havet mod de løse Masser og opkaster, som paa saa mange Steder ved Islands Sydkyst, de lange og lave Sandtunger. Der hvor Beiðamerkrjökull med Sanden nu er, var der i historisk Tid et stort fladt Bygdelag med mange Gaarde, som imidlertid nu alle er ødelagte af Bræen med dens Elve, nndtagen den vestligst liggende lille Gaard *Kvisker*, som man ser, naar man rider over Sanden. Naar denne Ødelæggelse af Landet har fundet Sted er ikke sikkert afgjort. *Olafsen* og *Povelsen* mener, at indtil Aar 1100 og maaske længe derefter har her været en stor og smuk Bygd, og at Jorden overalt har været bevoxet med Skov og Græs; de mener fremdeles, at Ødelæggelsen begyndte i det 12te Aarhundrede, men i det 14de Aarhundrede, nemlig 1362, har den naaet sin Fuldbyrkelse. »Dette samme Aar mælde og Landets Aarbøger, at den ganske Strækning, fra Sidens Øster-»Del, til Almannaskard eller Hornefjordens østligste Grændse, »omtrent 5 Thingmandsreiser eller 15 Mil i Længden, blev

»ødelagt, endskjønt en stor Del af Hornefjorden, nogle Gaarde »i Øræfene og endelig Siden ere igjen bebygte.« Man kjen- der endnu Navnene paa mange af de Gaarde, som har lig- get i denne ødelagte Landstrækning. Men Herjingen af Landet ved Bræer og Jøkelelve er ingenlunde ophørt. Øst for Breiðamerksandr sees paa Gunnlaugssons Kart afsat Gaarden *Fell*, men denne blev ødelagt, derved at Elven *Vedurá* for 12 Aar siden kom om Sommeren med Isgang og Vand, saa Gaarden kan ikke beboes mere. Foran Breiða- merkrjökull sees hyppig Torvstykker, som kommer frem af Jøkelen, og som antages at repræsentere Dele af det af Bræen bedækkede Land. *Sveinn Pálsson* reiste forbi Breiðamerkr- jökull i 1793 og i 1794 og fortæller, at i 1794 var Bræen østenfor Jökulsá rykket omkring 200 Favne længer frem end Aaret iforveien.

*Øræfajökull*, paa hvilken Islands høieste Toppe *Hnappr* og *Hvannadalshnúkr* hæver sig op over Isen, er en med Vatnajökull sammenhængende Ismark eller den sydligste og høiestliggende Del af *Vatnajökull*. Fra *Øræfajökull* kommer der mange Bræer med. Den allervestligste Del af Breiða- merkrjökull næres efter *Sveinn Pálsson*, der har besteget *Øræfajökull*, fra denne, idet han fortæller, at der »østenfor »Gaarden Kvisker skyder en meget stor Gletscher ned imod »den vestre Side af Breidamerkurfjeldet, og er nedenfor Ro- »den af samme, for ikke mange Aar siden, løbet i et med »Breidamerkurjøkelen, og har ligesom stødt denne af Veien, »saa som den er kommet fra et høiere Sted, nemlig ligefra »Toppen af *Øræfajøkelen*.« Den østligste Arm fra *Øræfa- jökull* er efter dette den vestlige Del af Breiðamerkrjökull.

Vest før Breiðamerkrjökull ligger en mægtig Bræ, *Kviá- jökull*, hvorfra Elven *Kviá* har sit Udspring. *Kviájökull* ud- mærker sig ved sine store Sidemoræner, der foran Bræen gaar sammen i den store gjennembrudte Endemoræne. Denne



er usædvanlig høi og kan efter Øiesyn anslaaes til 100 Meters Høide.

Fremdeles længer vest kommer *Holdjökull* og *Steðdjökull* ned ifra *Öræfajökull*, og den første naar til ringe Høide over Havet.

Imellem *Hof* og *Sandfell*, paa *Öræfajökulens* sydvestlige Side, sees i Høiden to Bræer i de trange, steile Dale, og fra Ismasserne her næres Elven *Kátá*. I disse Jøkler var det vistnok, at det store Jökulhlaup af 1727 fandt Sted, ved hvilken Leilighed Isbjerget selv gled frem paa den slette Mark som »naar smeltet Metal slaaes af en Digel.«

Nær *Sandfell* kommer der ned en stor Bræ, *Virkesjökull*, med en 140 Fod høi Moræne, som indeholder et Udvalg af meget forskellige Bergarter, ligesom overhovedet Strækningen mellem *Hof* og *Sandfell* udmærker sig ved talrige Blokke af de forskjelligste Bergarter Basalt, Trachyt, Obsidian, Begsten, Pimpsten o. s. v. Den nederste Ende af *Virkesjökull* ligger 357 Fod over Havet, Toppen af Morænen 494 Fod over Havet, saa at Morænen Høide bliver 137 Fod, og selve Bræens Mægtighed nær Enden er større, kan vistnok anslaaes 200 Fod. Under det store Jökulhlaup i 1362 kom antageligvis Vandmasserne fra denne Bræ.

Nær ved Gaarden *Svinafell* kommer den pragtfulde *Svinafellsjökull* ned til en Høide af 312 Fod over Havet; Morænen er omtrent 121 Fod høi, og Bræens Mægtighed voxer hurtigt til 265 Fod og til 400 Fod. Som man ser, er disse Jøkler i og for sig særdeles betydelige, men i disse Omgivelser, hvor der findes saa enorme Ismasser som *Breidamerkrjökull* og *Skeiðarárjökull*, bliver de kun Bræer af anden Rang. Skuringsmærker med Retning SSV fandtes paa det faste Fjeld ved *Svinafellsjökull*, ligesom skurede Stene iagttoges i Morænen for *Virkesjökull*. En anden Arm af *Öræfajökull*, som kaldes *Skaptafellsjökull*, kommer ned ved Gaarden *Skaptafell*. Endelig ligger nordligere *Morsárjökull*, der



næres af Ismasserne paa Grændsen af Öræfajøkull og den egentlige Vatnajøkull. Elven *Morsá* kommer fra denne Jøkul, men forener sig snart med *Skeidará*.

Ligesom under Öræfajøkullens Ismasser skjuler der sig Vulkaner et eller andetsteds under eller nær *Skeiðarárjökull*, en Bræ, der ligesom Breiðamerkrjökull og de andre forhen nævnte Bræer næres fra Vatnajøkullens Ismasser, og som ligesom denne gaar ud med betydelig Bredde imod flade, øde, ofte vexlende Sten- og Sandstrækninger. De to fra Jøkelen kommende vigtigste Elve er *Nupsvothn*, der optager Elven *Sula*, samt *Skeidará*, der har givet Sanden foran Navn af Skeiðarársandr. Selve Jøkullen er der, hvor den kommer ned ifra eller gaar over i Vatnajøkull af mindre Bredde, circa 10 Kilometer, men længer ned imod Sanden udvider den sig til en Bredde af circa 20 Kilometer. Vest for Jøkullen, før den breder sig ud mod Sanden, ligger de spidse *Sulutinðar* og øst for Bræen ligger *Jökulfell*; længer syd ligger vestligt paa Sanden det steile *Lómagnúpr*, 2455 Fod høi, bestaaende af grovt Konglomerat sammenkittet af Tuf, før et gammelt Forbjerg i Havet, med steile Styrtninger, men mod øst begrænses Sanden af de Fjeldmasser, som bærer Öræfajøkull.

Foran Bræen ligger to Rader af Endemæræner, den ene umiddelbart foran Bræen, den anden et Par Kilometer foran. Den laveste Del af Jøkullen naar ned til omtrent 194 Fod over Havet. Morænerne følger Bræens Rand regelmæssigt med variabel Høide 20 Meter og mere over Sanden. Bræen gaar kløftet med en snavset Rand ud imod Sanden, og denne lange Rand er halvcirkelformet; saa stiger Bræen stadigt indover, indtil den naar en Høide paa 752 Fod, videre 826 Fod og endelig 1237 Fod over Havet, og saa stiger den indover fremdeles. Hvorledes Underlaget stiger, er ikke godt at afgjøre, men efter Landets Udseende at dømme er Underlagets Stigning ikke betydelig, saa at jeg ikke er tilbøielig til at tro, at Skeiðarárjökull har en Mægtighed opimod 1000 Fod. Denne

Bræ smelter fortiden af og trækker sig dygtigt tilbage. For 24 Aar siden var Bræens Afstand fra Fjeldvæggen nordenfor Lómagnúpr kun 60 Favne, men nu er denne Afstand mindst 400 Favne. Ifra Sommeren 1880 til 1881 antoges Bræen at have trukket sig 100 Favne tilbage. Men samtidigt med, at Bræen har trukket sig tilbage, saa er den afsmeltet, saaledes at dens Mægtighed er væsentligt mindre i 1881 end i 1880. Præsten paa Sandfell, Sire *Sveinn Eiríksson*, paaviste dette tydeligt for os: Fra *Sandfells* Præstegaard, der ligger 20 Kilometer i ret Linie fra de midtre Partier af *Skeiðarárjökull*, tegner denne sig som en svagt hvælvet Ryg og opover denne Ryg ser man hele Rækken af *Sulutindar*, ogsaa de mindre Pigge. Men i 1880 var det netop saavidt, at man kunde øine den øverste Tind af *Sulutindar*. Bræen er i Aarets Løb afsmeltet saa meget, at man nu kan se hele Rækken. Efter nogle sammenlignende Maalinger, som jeg anstillede ved en Bestigning af *Hverfildalsøxl*, et 2607 Fod høit Fjeld nord for *Lómagnúpr*, antager jeg, at denne Afsmeltning svarer til en Formindskelse i Mægtighed paa circa 200 Fod. I dette Aar, i hvilket Bræen har aftaget saa meget, kom der ogsaa frem en ny, før ukjendt Elv paa *Skeiðarársandr*, hvilken Elv i 1880 kun med Nød og Neppe lod sig befare med Heste, men i 1881 var den ikke stor.

*Sveinn Pálsson* fortæller om lignende Aftagen i denne Bræes Mægtighed efter et Jökulhlaup i 1784. Før Hlaupet var *Skeiðarárjökull* saa høi, at *Lómagnúprs* forreste Huk øinedes kun som en liden Klippe over Jökelen fra det temmelig høie Fjeld ved *Skaptafellssel*, da Jökellen tillige rak ganske hen til Grusdyngerne (Morænerne) foran dens Kant, nu derimod (i 1782—94) sees næsten den øvre halve Del af samme over Jökelen lige fra Gaarden selv.

Den sydvestlige Del af Vatnajökull hedder *Skaptárjökull* eller *Síðujökull*; denne har jeg kun seet i Afstand en klar Morgen ifra Vulkanerne af 1783, og den viste sig da som en

svagt stigende, sønderskaaret, særdeles bred, pragtfuld Ismark. *Tungnafellsjökull*, der sees fra Sprengisandr, er en nordvestlig Udligger af Vatnajökull, adskilt fra denne ved *Vonarskarð*.

De Bræer, som Vatnajökull maatte sende ned paa Nord-siden, er lidet kjendte.

Nordvestligt for Vatnajökull, adskilt fra samme ved Sprengisandr, ligger *Hofsjökull*, hvis østligste Del benævnes *Arnarfellsjökull* og den søndre Del hedder *Blágn'pujökull*. Dens Størrelse er omtrent 25 Kvadratmil. Paa Østsiden mod *Sprengisandr* er denne Bræ svagt skraanende og kløftet, med Moræne foran. Ingen Vulkan eller overhovedet Eruptioner er kjendt fra denne Bræ; dog saaes foran Bræen nær *Þjorsás* Kilder Lava, der synes at være kommet fra Bræen. *Sveinn Pálsson* omtaler Hverrer eller varme Kilder i *Kerlingarfjöll*, nær Jøkellens sydvestlige Del, dem han dog ikke har seet, og flere Hverrer findes afsatte paa Gunn-augssons Kart i *Kerlingarfjöll* nær Jökullen. Spor af vulkansik Virksomhed synes altsaa heller ikke at savnes i denne Jøkel. *Arnafell it mikla*, sydøstligt ved Jökelen, hæver sig høit over denne.

Næst Vatnajökull er vistnok *Mýrdalsjökull* Landets mærkværdigste Ismark, ved det, at her holder den skrækelige Vulkan *Katla* til, ligesom ogsaa Ismarkens vestlige Del, den saakaldte *Eyjafjallajökull*, har havt Eruptioner. *Mýrdalsjökull* er egentlig kun den sydøstligste Del af de 16 Kvadratmile store Ismarker, som ligger mellem *Markarfljót* og *Mýrdalssandr*; thi de forskjellige Dele bærer forskjellige Navne; den vestlige Del benævnes som berørt *Eyjafjallajökull*, den nordligere Del *Godalandsjökull* og en anden endnu nordligere liggende Del *Botnjökull* eller *Merkurjökull*.

*Mýrdalsjökull* er mest bekjendt for sine voldsomme Jøkulhlaup, som herjer disse Egne, naar *Katla* har Udbrud. Næst Hekla er *Katla* den Vulkan, som har havt de fleste Udbrud;

man kjender ialt 13, Mýrdalsjökull er en mægtig og snavset Ismark, der skraaner jævnt op imod en flad Ryg, hvor *Katla* eller *Køtlugjá* ligger. Foran Bræen ligger Mýrdalssandr, der gennemstrømmes af de brede Elve, som kommer fra Jökullen. Sydsiden af Mýrdalsjökull og Eyjafjallajökull adskilles kun ved en forholdsvis smal Rand af Land fra Havet, og her ligger flere mindre Sande, *Sólheimasandr*, *Skógasandr* og *Eyjafjallasandr*. Dog er disse Sande smaa sammenlignede med *Breiðamerkursandr* og *Mýrdalssandr*, ligesom Landstrækningen her i syd for Bræerne i *Eyjafjallasveit* og i *Mýrdalr* har brugbart Land og ikke faa Gaarde.

*Sólheimajökull* kaldes den Del af Bræen, som ligger mellem *Eyjafjallajökull* og den egentlige Mýrdalsjökull, og her kommer ud af Bræen Elven *Fúlilækr* eller *Jökulá á Sólheimasandi*, en slem og skidden Elv, der lugter overordentligt stærkt af Svovlvandstof, en Egenskab, som ogsaa skal udmærke et Par andre Bræelve paa Island, men ingen lugter saa slemt som denne.

*Eyjafjallajökull*, 5432 Fod over Havet, den vestligste Del af de her omhandlede Ismasser, er ogsaa en Vulkan med Udbrud i 1612 og 1821; nær Toppen er efter *Sveinn Pálsson*, der besteg Jökullen i 1793, en Fordybning, den han ansaa for et utvivlsomt Krater. Mod Nordsiden sender denne Jökul forskellige Bræer ned, hvilke imidlertid ikke er nærmere undersøgte.

I nordlig Retning for *Merkurjökull* ligger en 2 Kvadratmile stor Ismark, som benævnes *Torfajökull*. Denne Bræ fortjente nærmere at studeres, da talrige hede Kilder, Hverrer og Laug skal forekomme ved Jökullen. *Olafsen* og *Povelsen* har været oppe her og seet Hverrerne.

Ovenfor *Fljótshlíð* ligger *Tindfjallajökull*, en liden Ismark, hvorfra nogle Pigge rager op.

*Lángjökull*, der dækker circa 25 Kvadratmile, og som naar



en Høide paa omtrent 4500 Fod, bærer forskellige Navne, saaledes kaldes den *Geitlandsjökull*, *Skjaldbreiðarjökull*, *Bláfellsjökull*, *Balljökull*. Enkelte isoleret liggende Jøkler omgiver den, saaledes *Eyríksjökull*, der udmærker sig ved sine bratte Sider, og som er omtrent 2 Kvadratmile stor; den naar en største Høide af 5730 Fod, og sender nogle smaa Bræer ned. Den skilles fra *Lángjökull* ved *Flosaskarð*. Vestligt adskilt fra *Geitlandsjökull* ved *Kaldidalr* ligger *Ok* (3800 Fod), sydvestligt den gamle Vulkan *Skjaldbreið* (3300 Fod) og endelig *Hlædufell* (3700 Fod), alle med Is i de øverste Dele.

Selve *Lángjökull* har en aflang Form og ligger i Landets midtre Del, vestligt for *Hofsjökull*. Langs Sydostsiden af Jökullen ligger en Række Tinder, *Jarlshettur*, som kan sees østenfor Geysir. Et stort Vand *Hvítávatn* støder op til Jökullen paa Sydostsiden, og herfra har *Hvítá* (i *Biskups-tungur*) sit Udspring, men den Elv som gaar ud mod Vest heder ogsaa *Hvítá*, og falder ud i *Borgarfjörðr*. Fra *Geitlandsjökull* omtaler *Povelsen* og *Olafsen*, at der nogle Fod fra Isbredden laa opkastet en over 60 Fod høi Vold eller Gjerder af Grus, Pimpsten og andre Stenarter, store og smaa, og deriblandt mange Stykker af Kampesten, som 6 til 8 Karle ikke kunde røre. Dette er øiensynligt en høi Moræne. I *Geitlandsjökull* ligger *Þorisdalr*, en Dal, der omtales i *Grettis Saga*, og hvis Beliggenhed var glemt indtil *Gunnlaugsson* kom der i 1833. Dalen er gold og græsløs, og Bræer gaar ned i den. Fra *Lángjökull* kjendes ikke vulkanske Udbrud i historisk Tid, men Lavamasser, der forekommer omkring Bræen, viser, at ogsaa her har fundet Eruptioner Sted.

Yderst paa Snæfellsnæs ligger *Snæfellsjökull* (4577 Fod), som sees over *Faxafjörðr* fra Reykjavik. Det er en gammel Vulkan omgivet af Lava, i hvilken Vandet fra Bræen synker ned. Ingen Udbrud i historisk Tid kjendes herfra.



Paa den nordvestlige Halvø af Island, *Vestfirðir*, er der to Jøkler, af hvilke den ene, *Drángajökull*, er saa stor som Justedalsbræen, og den anden, *Glámujökull*, større end Folgefonn. Men disse Jøkler er ikke meget høie, den første 2837 Fod, *Glámujökull* 2872 Fod paa det høieste; men Fjeldstrækninger af denne Høide er i andre Dele af Island fri for Is. Disse Jøkler, som kun er lidet kjendte, hvad der overhovedet er Tilfældet med alle Islands Jøkler, sender forskellige Bræer ned i Dalene, saaledes i *Bjarnarfjorðr*, *Reykjarfjorðr*, *Þaralátrsfjorðr*, i *Leirufjorðr* og i *Kaldalón*. Mange Elve med grumset Brævand søger ned i Fjordene og anretter Ødelæggelser især i *Leirufjorðr* og *Kaldalón*. Hverken i *Glámujökull* eller i *Drángajökull* har der fundet Udbrud Sted.

De store Strækninger af Sten og Sand, som ligger foran Jøklerne, og som Islændingerne kalder »Sandr«, er utvivlsomt et Produkt af Isens Virksomhed forenet med Jøkelelvenes Arbeide, hvortil kommer ogsaa over enkelte Sande de Stenmasser, som føres ned fra Jøklerne under Jøkulhlaup. De paa Islands Sydkyst liggende Sande, *Breiðamerkursandr*, *Skeiðarársandr* og *Mýrdalssandr* er øde Strækninger, der maa tilbagelægges paa én Dag, da der ikke paa Veien findes Græs for Hestene. Sandene bestaar mest af middelsstore og smaa Stene, mere eller mindre tilrundede, men ublandet Sand er sjeldnere. De nævnte Sande strækker sig fra Havet langsomt op imod Bræen, og gaar saa over i de større eller mindre Endemoræner, som ligger foran Bræen. Unægtelig maa man ved Synet af disse Kvantiteter af løse Masser foran Bræerne komme til at tænke paa de glaciale Dannelser paa den nordeuropæiske Slette, paa den danske Rullestensformation, paa den tyske Diluvialkies. Ligesom hine Sande ligger foran de moderne Jøkler som et Produkt af disses eroderende og transporterende Virksomhed, saaledes ligger hine løse Masser af fremmede Bergarter over store

Dele af Rusland, Tyskland, Danmark og Holland som Levninger efter hine Istidens Jøkelmasser, der dækkede Finland, Sverige og Norge.

*Sprengisandr* ligger mellem de to mægtige Jøkler, *Hofsjökull* og *Vatnajökull*; dens Overflade er mere kuperet end de før nævnte sydlige Sandes, der hyppig gennemrodes af vandrige Elve. Men ogsaa *Sprengisandr* er sikkerligen at opfatte som en storartet Ansamling af de løse Masser, der er ført afsted fra de to nævnte betydelige Bræer.

---

## II. Om Jøkelelvne og deres Slamgehalt.

Der er neppe tidligere gjort noget Forsøg paa at bestemme Vandmængden i de islandske Elve, ligesaa lidt som det er undersøgt, hvor store Mængder af knust Sten, der aarligt føres til Havet af dem. Under Reisen paa Island faldt Ruten slig, at alle *Vatnajökulls* Elve maatte passeres, og Leiligheden blev da benyttet til at gjøre et Overslag over Vandmængden i Elvene og til at medtage Prøver af Brævandet for at undersøge dets Gehalt af suspenderede Bestanddele. Ved denne Undersøgelse blev i et Par større Elve Bredden, Dybden og Hastigheden maalt, og deraf Vandmængden for denne Dag udregnet. Nu kommer der imidlertid saa mange Elve ud af *Vatnajökull*, at skulde Vandmængden i dem nøiagtigt maales, saa vilde dette blive et stort Arbeide for sig selv. Ved de mange mindre Elve blev der da kun gjort et Overslag over Vandmængden paa den Maade, at jeg lagde Mærke til, hvor langt Vandet

gik op paa Hestene, og samtidigt bedømte jeg Bredden og Hastigheden, saa at der blev Anledning til at faa et Begreb om Vandmængden. Det er klart, at den Vandmængde, som man ønsker at maale, i og for sig er variabel, og det i meget høi Grad, fremdeles at den her benyttede Fremgangsmaade kun giver et meget tilnærmet Resultat samt endelig, at der egentlig behøvedes en igjennem et helt Aar fortsat Iagttagelsesrække for hver Elv til, forat angive Kvantiteten af de Vandmasser, som flyder ud af Vatnajökull. Det eneste, vi her kan opnaa, er et yderst tilnærmet Overslag over Vandmængden.

Slamgehalten er maalt paa den Maade, at der i ringe Dyb under Overfladen af den strømmende Elv er fyldt en Flaske Vand, som senere er filtret, saaat Slammængden i 1 Kubikmeter kan beregnes.

De løse Masser, som i Form af Sand, smaa Stene og større Stene føres ud af Bræelvene, unddrager sig Beregning, ligesom de Mængder Stene, som Bræerne selv aarlighaars opheber foran sig, ikke godt kan beregnes. Men at disse Masser er særdeles betydelige, viser de milevide, golde Strækninger, som ligger foran de islandske Bræer; paa mange Steder er der blevet tørt Land der, hvor der før var Hav.

Fremdeles er det umuligt at danne sig et Begreb om den Mængde Vand og den Mængde Slam og løse Masser, som føres ud under Jökulhlaupene, da hele Egnes Udseende i kort Tid kun forandres ved de Vandmasser, den Is og de løse Stene, som føres frem fra Bræen.

De fleste af de Elve, som kommer fra *Vatnajökull*, gaar imod Nord eller imod Syd. De Elve, som gaar imod Nord, er, som før berørt, lange, men faa, idet talrige Smaaelve har forenet sig til faa og større. De Elve, som gaar imod Syd, er derimod talrigere og kortere, thi Afstanden fra Bræen til Havet er kort, og de strømmer mest over flade Sandstræk-

ninger, hvor deres Løb ofte vexler, idet de næsten dagligt forandrer sig. De er vanskelig at komme over, fordi deres Bund ofte bestaar af Slam, Stene og Kviksand. I Elvene ligger der ofte Sandøer, der skifter Beliggenhed med Elvenes Væxt.

Den østligste af de Elve, som kommer fra Vatnajøkull, og som løber i nordlig Retning, er *Jökulsá i Fljótsdalr*, som falder ud i *Lagarfljót*. Indsøen *Lagarfljót* fandtes at være hele 110 Meter dyb, men en mindst 9 Kilometer lang Strækning i Indsøens øvre Del er udfyldt af de løse Masser, som Elven har ført ned. 27 Kilometer nedenfor Elvens Udløb i *Lagarfljót*, ved *Egilstaðir*, toges en Vandprøve, og det viste sig, at Vandet her endnu indeholdt 19 Milligram Slam i 1 Liter, eller 19 Gram i 1 Kubikmeter Vand. *Jökulsá i Fljótsdalr* optager, før den falder ud i *Lagarfljót*, *Kelduá*, som skal komme fra en Indsø *Kelduárvatn*, som efter *Sveinn Pálsson* før laa en rum Vei fra Jøkelens Kant; men Bræen skal senere være gaaet ud over Søen, hvorfor *Kelduá* ogsaa begyndte at blive jøkelfarvet. Vandmængden i *Jökulsá*, hvor den falder ud i *Lagarfljót*, anslaaes til 120 m<sup>3</sup> pr. Sekund.

*Jökulsá i Fljótdalr* falder ud i Havet ikke langt fra Munden af *Jökulsá á Bru*, den næste store Elv, som flyder mod Nord fra *Vatnajøkull*, og som ved sit Udløb har dannet de Sandstrækninger, som benævnes *Héraðssandr*. *Jökulsá á Bru*, som ogsaa kaldes *Jökulsá á Dal*, dannes efter *Sveinn Pálsson* ved en Forening af 5 Elve fra *Vatnajøkull*. Den gennemstrømmer med Fart den trange *Jökuldalr* i en smal Erosionsseng, og den store Elv skal paa sine Steder sammenknibes slig i sit Leie, at forvovne Folk har sprunget over. Den skal optage 38 Elve, som ikke fører grumset Jøkelvand, men Bygdevand eller Bergvand. Over denne Elv gaar det ikke an at ride, ei heller kan den passeres i Baad, og Bro findes kun paa et Sted i den nedre Del ved



*Fossvellr*. Længer oppe i Dalen kommer man over paa Drátt, det vil sige, man haler sig over i en Kasse, som hænger i Touge. Ved *Hákonarstaðir*, hvor Elven strømmer med en Fart af 2,2 Meter pr. Sekund, fandtes en Vandmængde paa 97 m<sup>3</sup> pr. Sekund; men der hænder, naar der er Flom, at Vandet gaar helt op under de Touge, som er spændt over Elven for Færselens Skyld, og da disse Touge hænger tvert over Elvens Erosionsseng, 10 Meter over almindelig Vandstand, saa tør det heraf sikkert sluttet, at Vandmængden er mange Gange saa stor i Flomtider. Elvens Længde er omtrent 150 Kilometer, og Slamgehalten fandtes 4de Juli 975 Gram pr. Kubikmeter. *Jökulsá á Fjöllum* eller *Jökulsá á Axarfirði* er Islands længste Elv, 200 Kilometer lang. Den skal efter *Sveinn Pálsson* dannes af 12 Jøkelelve fra Vatnajökull; den strømmer øst for *Herðubreid* og *Mývatns Örfæfi*, danner Islands største Fos *Dettifoss* og falder ud i *Axarfjörðr*, dannende ved sit Udløb en Sandstrækning *Skógasandr*. Ingen Bro og intet Vadested findes over denne store Elv, men der er et vigtigt Færgested ved *Grimstaðir*. Her fandtes Vandmængden 450 m<sup>3</sup> pr. Sekund. Slamgehalten var 600 Gram pr. m<sup>3</sup>. *Skjálfandafjót* er den fjerde store Jøkeelv, som fører Vandmasserne mod Nord ud til Havet; dens Kilder er lidet kjendte. Den gennemstrømmer *Bárdardalr* og danner flere Fosse *Aldeyjarfoss*, *Goðafoss* og *Ullarfoss*, samt optager Elve fra *Odáðahraun*. Den falder ud *Skjálfandi*, dannende en Sand, *Sjáfarsandr*. Dens Længde er omtrent 170 Kilometer, Vandmængde ved Storuvellir i Mødrudalr fandtes 105 m<sup>3</sup>. Den har Vadesteder i *Barðardalr*.

*Tungnaá* og *Kaldakvísl* er de to vestligste Elve, der kommer fra Vatnajökull, og disse to Elve er Bielve til *Þjorsá*, der har sine Kilder i *Hofsjökull*. *Kaldakvísl* kommer efter *Gunnlaugssons* Kart fra Omgivelserne omkring *Vonarskarð* og strømmer i sydvestlig Retning, indtil den optages



af *Tungnaá*, før denne falder ud i *Þjorsá*. *Tungnaá*'s Kilder er ukjendte, efter et Sagn har *Tungnaá* og *Skaptá* og *Hverfisfljót* alle tre samme Udspring i *Skaptárjökull*, idet den oprindelige Elv ved en stor Klippe deler sig i de tre Elve. Vandmængden i *Tungnaá* og *Kaldakvísl* er anslaaet tilsammen til 200 m<sup>3</sup> pr. Sekund.

*Skaptá*, bekjendt fra det vulkanske Udbrud i 1783, da Elven udtørredes, og da Lavaen fyldte Elvens Rende, kommer fra *Skaptárjökull* og gjennemstrømmer en Indsø, der ikke er afsat paa Kartet, men som ligger i nordlig Retning for de nordostligste Kratere af 1783. Elven strømmer først imod SV, derpaa mod Syd, hvorpaa den største Del af Elven løber i østlig Retning ud i *Skaptáros*, men en Del af dens Vande løber til *Kuðaflljót*. Dens Vandmængde kan anslaaes til 40 m<sup>3</sup> pr. Sekund.

*Hverfisfljót*, der i 1783 under Udbrudet udtørredes ligesom *Skaptá*, strømmer i sydlig Retning langs og tildels under Lavamasserne. Dens Vandmængde kan anslaaes til 30 m<sup>3</sup>.

*Djupá*, som optager *Brunná* og et Par andre mindre Elve fra *Síðujökull*, fører omkring 20 m<sup>3</sup> Vand pr. Sekund. Langs *Djupá* er en gammel Lavastrøm, for hvilken Udbrudsstedet ikke kjendes, men Hraunet skal kunne følges helt op til Jökullen, saa at det vistnok er kommet fra denne.

*Nupsvötn* og *Skeiðará* er de to vigtigste Elve fra *Skeiðarárjökull*; de er berygtede for sine Flomme, men især for de heftige Jökulhlaup, som indtræffer i dem. De er ofte vanskelig at passere, undertiden er det umuligt at komme over dem. *Nupsvötn*, som ogsaa kaldes *Lómagnupsá*, kommer ifra et Vand op under *Vatnajökull* øverst i *Nupstaðarskogr*, hvilket benævnes *Grimsvötn* efter *Gunnlaugssons* Kart, men egentlig hedder det *Grænafjallslón*; derimod er det ikke bekjendt, hvor *Grimsvötn*, ved hvilket der angives at have været vulkanske Udbrud, ligger. *Nupsvötn* gjennemstrømmer den saakaldte *Nupstaðarskogr*, der er et Dal-

føre, der mod Vest begrændses af en Fjeldstrækning, som kaldes *Bjørn*, mod Øst af *Sulutindar* og mod Nord af *Vatnajökull*. *Skeiðarárjökull* udbreder sig fra Østsiden af *Sulutindar* foran Dalens Munding og kan, naar den voxer, stoppe Dalen, saa *Nupsvøtn* dæmmes op og forårsager Hlaup. Fra *Skeiðarárjökull* modtager *Nupsvøtn* nederst i *Nupstaðarskogr* den grumsede Elv *Sula*, og disse to Elve strømmer da i mange Arme over Sanden ud imod Havet nær *Hverfisfljóts* Arme.

*Nupsvøtn* kan antages at føre 110 m<sup>3</sup> pr. Sekund og Slammængden var 318 Gram pr. m<sup>3</sup>.

*Skeiðará* eller *Jökulsá á Sandi*, paa den østlige Del af Sanden, skifter ofte Beliggenhed og er berygtet for sine Hlaup. Dens Vandmængde ansloges til 150 m<sup>3</sup> pr. Sekund, og dens Slammængde fandtes 570 Gram pr. Kubikmeter.

Disse Elve paa *Skeiðarársanden* vexler, som oftere berørt, sit Løb, og strømmer snart her, snart der over Sanden, Men et usædvanligt Tilfælde indtraf i 1880, idet en ganske ny Elv brød ud midt paa Sanden og blev i Løbet af faa Dage saa stor, at den ikke kunde befærdes med Heste eller kun lod sig ride med Nød og Neppe. Denne nye Elv var imidlertid i 1881 liden, førte omkring 15 m<sup>3</sup> pr. Sekund med en Slamgehalt af 1509 Gram pr. m<sup>3</sup>.

Fra de Bræer, der næres fra *Öræfajökull*, kommer der flere Elve, saaledes *Svinafellsá*, *Virkesá* og den slemme *Káta*, hvis Vandmasser sikkert kan anslaaes til 20 m<sup>3</sup> pr. Sekund.

Længer øst kommer der mange Elve, *Steðá* fra *Steðajökull*, *Holá* fra *Holárjökull*, *Kvíá* fra *Kvíárjökull* og saa kommer fra *Breiðamerkrjökull* *Hrútá*, *Deildará*, *Fjallá* og *Breidá*, Elve, hvis Vandmasser maaske kan anslaaes til 60 m<sup>3</sup> pr. Sekund. Fra *Breiðamerkrjökull* kommer saa den store *Jökulsá á Breiðamerkursandi*, den Elv, som af alle paa Island er værst at befare. Elven er meget kort,

neppe mere end 4 Kilometer, og kommer mægtig og grumset ud fra Bræen, for efter det korte Løb at naa ned til Havet. Dens Vandmængde kan maaske anslaaes til  $120 \text{ m}^3$  pr. Sekund, Slamgehalten fandtes 1876 Gram pr.  $\text{m}^3$  ved Bræens Udløb. Den østligste Elv fra Breiðamerkursandr hedder *Vedurá*, og har som før berørt ødelagt Gaarden *Fell*.

De østenfor liggende Elve *Steinávötn*, *Heinabergsvötn* og *Holmsá* kan antages tilsammen at føre  $80 \text{ m}^3$  pr. Sekund. De Elve, som falder ud i *Hornafjarðarfljót*, har jeg ikke passeret uden i selve Fljótet. Maaske vilde en Vandmængde af  $30 \text{ m}^3$  være en rimelig Antagelse for Vandmængden i de Elve, som søger ned fra de tre Jøkler. Elvene regnes af Pálsson til de betydelige Jøkelelve.

*Jökulsá i Lóni* hedder den østligste Elv, med hvilken vi her kommer til at beskæftige os; den kommer fra *Lónsjökull*, gennemstrømmer en Dal *Jökuldalur* og flyder saa over flade Strækninger, hvor den hyppig anretter Skade, ud i *Lónsfjörðr*. Vandmængden er anslaaet til  $30 \text{ m}^3$  pr. Sekund.

Ved Hjælp af de ovenfor anførte Tal vil vi forsøge paa at danne os et Begreb om de Vandmængder og de Slammængder, som udføres fra Vatnajökull paa en Sommerdag, idet vi for Oversigtens Skyld meddeler Tallene i en Tabel.

Elvenes Navne.	Vandmængde $\text{m}^3$ i Sekundet.	Slammængde Gram i $1 \text{ m}^3$ .	Tons Slam pr. Dag.
Paa Nordsiden af Vatnajökull.			
Jökulsá i Fljótsdalr . . . . .	120		
Jökulsá á Bru . . . . .	97	— 975	— 8171
Jökulsá á Fjöllum . . . . .	450	— 600	— 23328
Skjálfandafjot . . . . .	105		

tilsammen paa Nordsiden  $772 \text{ m}^3$  pr. Sekund.

Elvenes Navne.	Vandmængde m <sup>3</sup> .	Slammængde Gram i 1 m <sup>3</sup> .	Tons Slam pr. Dag.
Paa Sydsiden af Vatnajökull.			
Tungnaá og Kaldakvisl . . . . .	200		
Skaptá . . . . .	40		
Hverfisfljót . . . . .	30		
Djupá . . . . .	20		
Nupsvøtn . . . . .	110	— 318	— 3021
Ny Elv paa Skeidarársandr . . . . .	15	— 1509	— 1956
Skeiðará . . . . .	150	— 570	— 7387
Svinafellsá, Virkesá og Kátá . . . . .	20		
Smaaelve paa Breiðamerkursandi . . . . .	60		
Jökulsá á Breiðamerkursandi . . . . .	120	— 1876	— 19450
Heinabergsvøtn og Holmsá . . . . .	80		
Hornafjarðarfljót . . . . .	30		
Jökulsá i Loni . . . . .	30		

tilsammen paa Sydsiden 905 m<sup>3</sup> pr. Sekund.

Tilsammen flyder altsaa 1677 Kubikmeter Vand fra Vatnajökull pr. Sekund paa en Sommerdag, hvilket giver omtrent 145 Millioner Kubikmeter pr. Dag, hvad der for det hele Aar vilde give 53000 Millioner Kubikmeter, et Tal, der dog er for stort, da Vandmængden er mindre om Vinteren. Adderes Vandmængderne i de Elve, hvis Slamgehalt er bestemt, saa faar vi 942 Kubikmeter Vand pr. Sekund, og adderes Slammængden pr. Dag, saa faaes 63313 Tons for disse Elve pr. Dag. Antages nu, at Slammængden i de Elve, hvor denne ikke er bestemt, er den samme pr. Kubikmeter som i de Elve, hvis Slammængde kjendes, saa skal man altsaa forøge Slammængden i Forholdet 942 til 1677 for at finde det Antal Tons Slam, som paa en Dag udføres af Vatnajökull. Dette bliver altsaa 112713, eller med et rundt Tal 112000 Tons Sten pr. Dag udføres af Vatnajökull i Form af Slam i Elvene.



Hvis man, ved at multiplicere dette Tal med 365, vilde beregne Slammængden for hele Aaret, saa vilde man faa over 40 Millioner Tons Slam, men der er al Grund til at tro, at dette Tal vilde blive for stort af den Grund, at Vandmængden om Vinteren er mindre end om Sommeren, hvorved imidlertid maa bemærkes, at her er der ikke taget Hensyn til Slammængden i Flomtider og under Jøkulhlaup, ligesom det ogsaa maa erindres, at Temperaturforskjellen mellem Vinter og Sommer ikke er meget betydelig paa Island, saaledes som følgende Tabel viser.

	Varmeste Maaned Juli.	Koldeste Maaned Marts.
Stykkisholmr . . . . .	+ 9.6 % C	÷ 2.8 % C
Grimsey . . . . .	+ 7.1	÷ 3.5
Berufjørðr . . . . .	+ 8.3	÷ 1.3
Vestmannaeyjar . . . . .	+ 10.5	+ 0.4

Hvis vi imidlertid vil danne os en Forestilling om Slammængden for det hele Aar, da er der, saalænge der ikke foreligger Iagttagelser over Vandmængden i hele Aarets Løb, ikke andet Middel end at beregne Vandmængden ved Hjælp af Regnhøiden og Arealet.

Regnmængden paa Island er:

Berufjørðr . . . . .	1007 Millimeter
Stykkisholmr . . . . .	662    «
Grimsey . . . . .	497    «
Reykjavik . . . . .	732    «

Af disse Observationssteder ligger *Berufjørðr Vatnajökull* nærmest, og da den store Bræ som bekendt virker som en Kondensator for Vanddampene, som kommer ind fra Havet, kan vi vistnok, uden at frygte for at tage for stort Tal, anslaa Regnmængden for *Vatnajökull* og Omgivelser lig *Berufjørðrs* Regnmængde 1007 mm. i Aarets Løb eller med et rundt Tal 1 Meter. Drages Linier mellem alle de Steder



hvor Vandmængden i Elvene er bestemt, saa vil disse Linier indeslutte et Stykke Land paa 25000 Kvadratkilometer, af hvilke Vatnajökull selv indtager 8500 (150 Kvadratmile) eller omtrent  $\frac{1}{3}$ .

At bestemme, hvor meget af den faldne Sne og Regn, der fordamper, er neppe muligt, men i dette fugtige og kolde Klima tør den fordampede Sne og Regnmængde neppe anslaaes til mere end  $\frac{1}{5}$ . Efter disse Antagelser skulde der fra hin 25000 Kvadratkilometer store Landstrækning aarligt strømme 20000 Millioner Kubikmeter Vand, hvilket giver *634 Kubikmeter pr. Sekund* fra de ovenfor nævnte Elve. Men ovenfor er ved Maalingerne fundet *1677 Kubikmeter pr. Sekund* for de samme Elve paa en Sommerdag, hvoraf altsaa skulde sluttes, at Vandmængden i Sommermaanederne skulde være 2 til 3 Gange saa stor, som den midlere Vandmængde. De ovenfor nævnte 40 Millioner Tons Slam skal altsaa reduceres i Forholdet 1677 til 634, hvilket giver omtrent *15 Millioner Tons Slam om Aaret*.

Vi kommer altsaa til følgende Resultater:

Paa en Sommerdag strømmer der 1677 Kubikmeter Vand pr. Sekund i Elvene fra Vatnajökull, og de fører dagligt 145 Millioner Kubikmeter Vand med 112000 Tons Slam fra Jökelen. Dette vilde i Aarets Løb give 53000 Millioner Kubikmeter Vand med 40 Millioner Tons Slam, hvilke Tal imidlertid maa reduceres paa Grund af den mindre Vandmængde om Vinteren. Lægges Regnhøiden og Arealet til Grund for Beregningerne, saa faaes 20000 Millioner Kubikmeter Vand med 15 Millioner Tons Slam om Aaret.

Som omtalt fører Maalingerne og Beregningerne til det Resultat, at Vandmængden pr. Sekund om Sommeren er 2 til 3 Gange saa stor som den gjennemsnitlige Vandmængde pr. Sekund for hele Aaret. Endskjønt dette Resultat i og for sig ikke er absurd, saa bør det dog erindres, at den Regnhøide, som er lagt til Grund for Undersøgelserne, er

*Berufjörðs*, da der selvfølgelig ingen Observationer have fra Vatnajökull. Imidlertid er det muligt, at Regnmængden oppe paa Vatnajökullen er meget betydeligere end i *Berufjörð*, og at derfor Vandmængden i Aarets Løb er større end her antaget.

Det er værd at undersøge, hvormeget hine 15 Millioner Tons Slam repræsenterer i Form af fast Fjeld. Sættes Bergarternes specifikke Vægt til 2.7, saa faaes  $5\frac{1}{2}$  Millioner Kubikmeter Sten eller en Terning af Sten med over 176 Meters (661 Fods) Side.

Efter en Beregning, som jeg før har anstillet med *Justedalsbræens* Elve, udføres der fra denne aarligt 69000 Kubikmeter Sten i Form af Slam, medens *Vatnajökull* udfører 5500000 Kubikmeter. *Vatnajökull*, der er 10 Gange saa stor, udfører folgelig omtrent 80 Gange saa meget Slam; dette Resultat vil ikke forundre den, der har havt Anledning til at sammenligne de mørke, graa og chokoladefarvede Bræelver fra *Vatnajökull* med de blakkede Elve fra *Justedalsbræen*. Den sidste hvilet paa de fasteste Bergarter, Gneis og Granit; *Vatnajökull* hviler paa løsere Tuf og paa Basalt, og den er derhos mægtigere.

Der gives Geologer, der mener, at Bræerne ingen eroderende Evne har, ja der er endog dem, som har ment, at Bræerne beskytter Underlaget, saa at Daldannelsen stilles i Bero, naar Bræ dækker Landet. Den, som er kommen til dette Resultat, bør verificere sine Ræsonnements ved Observationer paa Island; han sammenligne til Exempel *Jökulsá á Breiðamerkursandi* med dens tykke, mørkegraa, grumsede Jøkelvand, hvor den vælter frem under Bræen, med det klare Vand i de Elve, som ikke næres fra Bræer, hvilket Vand Islændingerne til Adskillelse fra Jøkelvand kalder Bergvand og Bygdevand. Iagttagelse og fornuftigt Ræsonnement vil snart føre til det Resultat, at en mægtig Bræ eroderer paa Underlaget med en Intensitet, der er iøinefal-

dende for enhver ved de opslidte Stenmasser, der stadigt føres ud i tusenvis af Tons om Dagen, medens Vandet i en mægtig Elv, der kommer fra isfrit Land, oftest er rent, krystalklart, saa at Erosionsarbeidet først erkjendes ved Betragtningen af Elveliets Form.

Foruden i de ovenfor nævnte Elve er Slamgehalten og Vandmængden tillige maalt i to andre store islandske Elve nemlig i *Þjorsá* og i *Hvítá*. *Þjorsá* har sine Kilder i *Hofs-jökull* paa dennes sydøstlige Side, hvor den ene grumsede Elv efter den anden strømmer ud af Jökelen, og her foran Bræen bestaar Grunden paa enkelte Strækninger af blød Slam med Stene i, saa det er vanskeligt at komme frem langs Bræen baade for Heste og Folk. *Þjorsá* strømmer mod SV, optager *Tungnaá*, der som før omtalt kommer fra *Vatna-jökull*, og Mundingen, der er bred, forenes med *Þverá*, som kommer fra *Eyjafjallajökull*.

Vandmængden og Slammængden blev bestemt ved *Þjorsárholt*, altsaa efterat *Tungnaá* er faldt i. Sandsynligvis er en stor Del af Slammængden her afsat paa Veien. Vandmængden fandtes 542 Kubikmeter pr. Sekund med 73 Gram pr. Kubikmeter, hvad der giver 3418 Tons om Dagen. Vandmængden er her altsaa større end i *Jökulsá á Fjellum*.

*Hvítá* (i *Biskupstungur*) næres fra *Lóngjökull*, men da den kommer ud af det store *Hvítárvatn*, er vistnok den betydeligste Del af Slammet kommet til Afsætning der. *Hvítá* strømmer i sydvestlig Retning og optager *Túngufljót*, *Laxá* og *Brúará*; senere optager den *Sog*, der danner Afløb for *Pingvallavatn*, og dens Udløb benævnes *Ölfusá*. Vandmængden er maalt ved Færgestedet vestfor *Grof*, før de nævnte Elve falder i. Vandmængden var 157 m<sup>3</sup> med en Slamgehalt af 36 Gram pr. m<sup>3</sup>, hvad der giver 490 Tons om Dagen, hvorved bør erindres, hvad netop er omtalt, at Vandet har gjennemstrømmet *Hvítárvatn*.

De Elve, som kommer fra *Mýrdalsjökull*, og som strømmer

Streichungssysteme. Der Sklavenhandel in Zentralafrika u. d. Möglichkeit seiner Ausrottung. David Livingstone. Die Jesuitenmissionen an d. Ostküste d. Insel Mindanao. Die Verhältnisse d. Landwirtschaft im Departement Vacluse. Meine Reise nach San'a, von Siegf. Langers. Die Aegypter. Zur Lehre von d. Ideenkreisen. Ueber afrikanische Reisetechnik. Reisebriefe aus d. südwestl. Nordamerika. Ueber barometrische Minima u. die damit in Zusammenhänge stehenden Witterungsverhältnisse. Die Bauprovinzen des Mittelalters. Stanleys Sieg am Congo. Aussichten deutscher Kultur. Aus Natur- u. Völkerleben Südwest-Afrikas. Die Aegypter. II. Land u. Volk.

**Die Natur.** Zeitung zur Verbreitg. naturwissenschaftl. Kenntniss u. Naturanschauung aller Stände. Hrsg. v. Dr. Karl Müller. Pr. pr. Aarg. Kr. 17,60. Indh. Aus den Kordilleren von Venezuela. Die Weinblume oder das Bouquet des Weines. Der afrikanische Strauss in Argentinien. Baume, Dornhecken und Beerensträucher in ihrer Beziehung zur Landwirtschaft. Ein königlicher Blumentempel. Zur Ethnologie der Tobakspfeife. Ueber Waldanlagen auf Haiden und Dünen in Jütland. Ein Vorschlag zur Kalender-Reform. Fang, Beobachtung und Präparirung der Hydra. Die Franzosen in Afrika. Die sekundäre Batterie. Hermann Wagner's illustrierte deutsche Flora. Botanische Mittheilungen. Die Pflanzenwelt auf Dr. Nachtigal's afrikanische Reiselinie II. Meteorologische Mittheilungen. Die österreichische arktische Beobachtungs-Station auf Jan Mayen 1882/83. Naturphilosophische Mitth. Biologische Probleme. Todtenbach der Naturforscher. Physikalische Mitth. Die Projektions-Kunst. Astronomische Mitth. Ueber den Entdecker des Biela'schen Kometen. Zoologische Mitth. Ueber die Fauna des Suez-Kanales. James Smithson und sein Vermächtniss. Landleben in Bengalen. Das Rosenöl. Die Steppen Innerasiens u. Afrikas. Mikroskopische fremde Einschlüsse in d. Gesteinsgemengtheilen. Nachträgl. Entdeckungen zu d. Ursache der Phosphoreszenz d. leuchtenden Materie. Zur Mystik d. Thierwelt. Electrisches Licht u. Vegetation. Das Gesetz d. Planetenentfernungen. Ueber die Möglichkeit Seefahrt im sibirischen Eismeere zu treiben. Projekt einer internationalen Teleometeorographie. Ueber d. Deutung d. Pflanzennamen. Ein Wort zur Geschichte d. Phosphoreszenz-Phänomene d. „bologneser Leuchtsteine“. Die Steppen Innerasiens u. Afrikas. Eine physiograph. Paralele. Die Errichtung einer Anstalt für Reichshydrologie. Ueber Waldanlagen auf Haiden und Dünen in Jütland. Charles Darwin's kulturhistorische Bedeutung. Ein neues Fett des Butterbaumes. Zur Ethnologie der Tobakspfeife. Literatur Bericht. Reisen und Reisende. Sieben Jahre in Süd-Afrika. Mutterpflanzen des Kautschuk. Ueber die Ermordung des reisenden Kleinschmidt. Literatur-Bericht. Entomologische Mittheilgn. Botanische Mittheilgn. Zoologische, ornitholog., meteorolog., biograph., museologische Mittheilgn. Astronomisches. Kleinere Mittheilgn. Anzeigen.



Archiv for Mathematik og Naturvidenskab udkommer med 1 Bind (4 Hefter) aarlig. Subscriptionsprisen er fastsat til 8 Kroner pr. Bind.

Syvende Binds andet Hefte indeholder følgende Afhandlinger:

**S. A. Sexe.** Skulde der ikke lade sig finde et reelt mathematisk Udtryk, der kunde overtage de imaginære Størrelses Rolle eller gjøre samme Tjeneste, som disse Størrelser?

**Sophus Lie.** Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden.

**Elling Holst.** Analytischer Beweis eines geometrischen Satzes.

**Sophus Lie.** Ueber Flächen, die infinitesimale und lineare Transformationen gestatten.

**S. A. Sexe.** Alte Strandlinien und glaciale Schliff-flächen im Strandgürtel.

**Amund Helland.** Om Islands Jøkler og om Jøkeelvenes Vandmængde og Slamgehalt.

**Alb. Cammermeyer.**

---



# Archiv

for

## Mathematik og Naturvidenskab.

Udgivet

af

Sophus Lie, Worm Müller og G. O. Sars.

Syvende Bind. Tredie Hefte.



Kristiania.

Forlagt af Alb. Cammermeyer.

1882.

## Avertissements.

**Das Ausland.** Wochenschrift für Länder- u. Völkerkunde, unter Mitwirkg. von Prof. Dr. Friedr. Ratzel u. a. Fachmänner hrsg. Jährl. 52 à 20 S. 4to. Pris pr. Aarg. Kr. 30,80. Indh. Otto Delitsch u. seine Bedeutg. f. d. Erdkunde. Sudan u. Aequatorialprovinz im Sommer 1872. Die Aegypter. Aus Natur- u. Völkerleben Südwest-Afrikas. Zur Congofrage I. S. de Brazzas Vortr. in d. geogr. Gesellschaft, Paris. Ein Brief Dr. Junkers über d. Uelle. Zur afrikanischen Sprachmischung. Neue Werke über Borneo. Ueber d. Expedition Riebecks. Nachrichten. v. d. Polarstationen. Geographische Ergebnisse aus Georg Liebschers Untersuchungen über d. wirthschaftl. Verhältn. Japans. Weisse Indianer in Südamerika. Die Forschungen d. Deutschen Handelsvereins im Orient. Zur Congofrage II: Stanleys Mittheilungen in London u. Paris. Ueber die Expedition d. Bremer geogr. Gesellschaft nach d. Tschuktschen-Halbinsel u. Alaska. Das deutsche Volkstum in Siebenbürgen: rücksichtl. seiner Herkunft. Finnland u. seine Nationalitätenfrage. Der Untergang d. Palmer-Gillschen Wüstenexpedition. Rich. Buchtas Photographien aus d. Oberen Nil-Ländern. Nordenskiölds Reisewerk „Die Umseglung Asiens u. Europas auf »Vega«“. Neue Nachrichten von d. Riebeckschen Expedition. Neue Werke über Borneo. Die Fortschritte d. Franzosen in Senegambien. Sechs Monate in P. vinz Oran. Zur Congofrage III: Père Augouard u. Rev. Comber. Nachträgl. über die Eisfahrt d. „Luise“ u. „Varna“. Ein glänzender Erfolg d. deutschen Afrikaforschung. Die Temperatur- u. Eisverhältnisse d. bayrischen Seen. Zur Ethnographie d. Polarvölker. Die Ex edition Dr. G. A. Fischers nach d. äquatorialen Ost-Afrika. Kleinere Mittheilgn. Notizen. Litteratur.

**La nature.** Révue des sciences et de leur applications aux arts et l'industrie. Journal hebdomadaire illustré. Redacteur en chef Gaston Tissandier. Pr. pr. Aarg. 26,00. Indh. Transmetteur automatique de mm. Siemens et Halske. Accumulateur de m. Faure, construit par m. Regnier. Conférences de la Sorbonne. Obturateur chronométrique pour la photographie. Les zootropes. La distribution de l'électricité. La Jeannette retrouvée. Pendule électrique papillonome. La lumière axhydrique. Les planètes et les taches solaires. Rapidité des transmissions télégraphiques. Le grand tunnel de l'Arberg. Chaudière verticale à flamme renversée. Excursion au Vignemale et à la vallé de Niscle. La physique sans appareils, expérience sur le centre de gravité. Vaccinations charbonneuses des animaux domestiques. Communication télégraphique entre les trains en marche. Utilisation des chutes du Niagara. Les téléphones à Paris. Société générale des téléphones. Le secret des lettres. Les récits de Marco-Polo. Phénomènes volcaniques dans la mer Jonienne. Une tire-lire mécanique. Le mé-

over Mýrdalssandr, vexler hyppigt; nogle af de Elve, som staar afsatte paa *Gunnlaugsons* Kart, findes nu ikke, og de Elve, der staar paa Kartet, har nu en anden Beliggenhed.

*Múlakvísl* løber nu i to Grene, den ene nær under Fjeldet ved *Hofðabrekka*, den anden længer østligt nær den af Sanden opstikkende *Ø Hafrsey*. Derimod findes paa Kartet afsat to Elve fra *Mýrdalsjökull*: *Eyará* og *Jökulvatn*, hvilke to Elve nu ikke synes at existere længer. En af de mærkeligste og slemmeste Elve paa Island er den saakaldte *Fúlilækr* eller *Jökulsá á Sólheimasandi*; den er ganske kort, kun omtrent 5 Kilometer, og kommer fra *Sólheimajökull*; Elven har stærkt farvet Jøkelvand, og Bræens Ende er snavset. *Fúlilækr* strømmer i en dalformet Fordybning, som den har gravet i løse Masser. Men hvad der især udmærker denne Elv er en stærk Lugt af Svovlvandstof, hvorfor ogsaa Elven bærer Navnet *Fúlilækr*, det er den raadne Elv eller Stankelven. Svovlvandstoflugten er saa stærk, at vi allerede mærkede den  $\frac{1}{2}$  Times Ridt, før vi naaede Elven. *Paijkull* søger at forklare denne stærke Lugt af Svovlvandstof af Forvitring af smaa Korn af Svovlkis og paaviste ogsaa Svovlkis i Stenene ved Bræen. Han antager, at naar itumalet Svovlkis kommer i Berørelse med Vandet, saa oxyderes Jernet samtidigt med, at Svovlvandstof dannes. Imidlertid synes denne Grund utilstrækkelig til at forklare den stærke Lugt af Svovlvandstof; thi selv i Svovlkisgruber, hvor meget store Kvantiteter Svovlkis, ofte i Pulverform, kommer i Berørelse med Vand, er Luften i Regelen frisk og god. Langt sandsynligere forekommer det mig at være, at der oppe i Jøkellen, hvorfra Elven næres, er Svovlkilder, der udsender Svovlvandstof, og at denne Gas absorberes af Vandet, og saa atter damper ud af *Fúlilækr*s grumsede Bølger. Det maa her erindres, at hine Jøkelmasser huser to Vulkaner *Katla* og *Eyjafjallajökull*, begge med Udbrud i historisk Tid,

og at Svovlkilder, der udsende Svovlvandstof, ikke er sjeldne vulkanske Eftervirkninger paa Island. *Bunsen* har analyseret Gasen ifra et stort Fumarolefelt ved *Reykjahlið*, sandsynligvis fra *Námafjall* og fandt hele 24 Procent Svovlvandstof i Gasen. Et Antal deslige stingende Gaskilder under Isen vil være tilstrækkeligt til at forklare den slemme Stank af Svovlvandstof fra *Fúlilækr*, men neppe den langsomme Forvitring af Svovlkis i Bergarten. *Sveinn Fálsson* beretter, at den ovenfor nævnte Elv *Múlakvísl*, der kommer fra *Katla*, har samme Lugt og Farve som *Fúlilækr*; det var i Slutningen af forrige Aarhundrede; i 1881 bemærkedes ingen saadan Lugt af *Múlakvísl*. Han omtaler fremdeles en tredie Stank-elv, som sædvanlig kaldes *Fúlakvísl*, og som falder ud i det før nævnte *Hvítárvatn*, hvorfra *Hvítá* har sit Udspring. Denne *Fúlakvísl* kommer fra *Balljökull*, men ikke langt fra denne findes de hede Kilder ved *Hveravellir*, og det synes da rimeligt, at Lugten ogsaa her skriver sig fra stinkende Gasarter, som udsendes af Jorden under Isen.

*Markarfljót* hedder den vestligste af de Elve, som danner Afløb for *Eyjafjallajökull*, endskjønt denne Elv har sine vigtigste Kilder vest for *Torfajökull*; men den optager Elve fra *Eyjafjallajökull*, og løber i flere Arme mod SV imellem *Fljótshlíð* og *Eyjafjallajökull*. Dens Arme vexler ofte Løb, og man ser hist og her omkring dens Arme gamle, delvis græsbeholdne Elveleier, som nu er forladte. Efter *Pálsson* skal man, naar man graver i Jorden omkring de af Elven omcirklede Landpartier, de saakaldte *Landeyjar*, finde afvejlende Lag af Jøkelgrus, sort Muljord og Brændtorv, skjønt det sidste sjelden under 6 Alen dybt nede.

Den Sand og Slam, som Jøkelelvne fører med sig, gaar ud imod Havet, og her afsætter sig, ofte fjernt fra selve Bræerne, Sandstrækninger. Man vil finde deslige store udfyldte Flader ei alene umiddelbart foran Bræerne, men ogsaa ved Bræelvenes Munding. *Gunnlaugssons* Kart viser, hvor-



ledes der foran de store mod Nord gaaende Elve er afsat Sande i meget stor Afstand ifra Bræerne. Saaledes *Herads-sandr* ved Udløbet af *Jökulsá á Bru* og *Jökulsá i Fljótsdalr*, *Skógasandr* ved Udløbet af *Jökulsá á Fjellom*, *Sjáfarsandr* ved *Skjálfandafljót*. Hvis man studerer Sandenes Beliggenhed i Forhold til Elvene, saa kommer man til et Resultat, der i sin Almindelighed kan udtrykkes saaledes: *Ingen af Islands store Jøkeelve falder ud i Bunden af en stor Fjord*. Denne Regel har sin Betydning, hvorfor det kunde værd at paavise den nærmere. Islands Østkyst fra *Berufjorðr* til *Lodmundarfjorðr* har mange Fjorde, men i ingen af dem falder der nogen stor Bræelv. De første store Elve, som vi træffer paa Nordlandet, *Jökulsá á Brú* og *Jökulsá i Fljótsdal*, falder ud i *Heradsfljó*, ikke i nogen dyb Fjord. I *Vapnafjorðr* og de andre Fjorde paa Nordlandet kommer der ingen Jøkeelve ud. *Jökulsá á Fjellum* falder ud i *Axarfjorðr*, der, som Kartet viser, er en aaben Havbugt, ikke nogen lang Fjord, og *Skjálfandafljót* falder ud i en lignende Havbugt, *Skjálfandi*. Saa kommer vi til den dybe *Eyjafjorðr*, men den Elv som falder ud her, *Eyjafjardará*, faar ikke Tilløb fra nogen Bræ, men fører kun klart Bergvand. Man kan gaa med disse Undersøgelser rundt hele Island, og man vil finde, at ingen af de store Bræelve falder ud i en dyb Fjord. Alle Elvene paa Sydlandet fra *Jökulsá á Breiðamerkursandi* og hele Rækken af Elve til *Markarfljót*, *Þjorsá* og *Hvítá* falder ud over øde Sandstrækninger, ikke i Bunden af store Fjorde. Jeg var først tilbøielig til at tro, at der var en Undtagelse nemlig *Hvítá* i *Borgarfjorðr*, en Elv som delvis næres fra Omgivelserne fra *Lángjökull*, og som efter Navnet at dømme maatte antages for en stor Jøkeelv, men som dog falder ud i Bunden af den lange Fjord *Borgarfjorðr*. Men ved at læse *Sveinn Pálssons* Beskrivelse af denne Elv vil det kunne sees, at det er kun en liden Bielv, som kommer fra Jøkelen, medens de øvrige Tilløb fører klart Bergvand, saa at denne ved



første Øiekast tilsyneladende Undtagelse bekræfter Regelen. Pálsson skriver om *Hvítá* i *Borgarfjörðr*: »Paa Alfarveien fra »Kaldidal mod Nord til Kalmanustunga reiser man over  $1\frac{1}{2}$  »Mils bred Sandmark, hvor ovenfor mod NO det førømmeldte »Geitland ligger; over denne Sandmark flyde 3 a 4 smaa og »ubetydelige Elver, hvoraf den sydligste kommer ned af »Geitlandsjøkelens Vestside gjennem en fæl Bjergkløfte øst- »ligst paa Kaldadalen og fører hvidagtigt Jøkelvand. de øv- »rige fører oftest klart eller Bergvand og kommer ned fra »Geitlandet. Forresten faar *Hvítá* sit meste Vaud dels fra »Nordlingafjotet, en Bergvandselv, der kommer fra nogle »ferske Søer paa Arnarvatnsheiden, dels fra de Elve, der »falde fra hver af de mange Borgarfjördsdale, som alle føre »klart Vand.« Det vil heraf fremgaa, at *Hvítá* i *Borgarfjörðr* kun faar en saare liden Del af sit Vand fra Bræen, hvad ogsaa *Pálsson* udtrykkeligt bemærker, og at den saaledes ikke kan være en Jøkelev med stor Slamgehalt.

Den naturligste Forklaring af dette besynderlige Faktum, at ingen af de store Jøkeelve falder ud i Bunden af en lang Fjord, er saare nærliggende. Da de store Jøkeelve dagligen fører tusinder af Tons Slam ud i Fjorden, saa vil disse udfyldes desto hurtigere, jo større Slam- og Sandmængden er, og naar derfor Elvene falde ud i Havet over aabne Sandstrækninger, da er derved antydnet, at de Fjorde, som maatte have været der, er udfyldte. Til et lignende Resultat kommer vi ogsaa ad andre Veie, ja man har paa Island tilforladelige Efterretninger om Fjorde, som var paa Landnámstid, men som nu er udfyldte, og paa mange Steder er der nu tørt Land, hvor der før var Hav. Men ad Analogiens Vei kommer vi her til den Slutning, at de Søer, som har ligget paa Jøkeelvenes Vei ogsaa maa være udfyldte, og de store Søer, *Þingvallavatn*, *Mývatn*, *Fiskivötn* i *Skaptafells-sýssel*, *Fiskivötn* paa *Arnarvatnsheiði*, og *Skorradalsvatn* osv., ingen af disse modtager Tilløb gjennem Jøkeelve. En

mærkelig Undtagelse er *Lagarfljót*, hvis øverste Del rigtig nok paa en Strækning af mindst 9 Kilometer, er udfyldt, men som endnu mærkværdigt nok har bevaret et Dyb paa 110 Meter over en Del af sin Udstrækning. Ellers vil man kun finde sjeldne Exempler fra Island paa, at grumsede Jøkeelve gennemløber Indsøer, selv om Elvene har en Længde paa 100 til 200 Kilometer. Overhovedet tyder alle Mærker paa, at Islands Overflade i høi Grad er forandret i postglacial Tid, meget mere end til Exempel Norges, og Aarsagen hertil er den, at Bræerne er større og mægtigere, og at Bergarterne har mindre Modstandsevne. At Vulkanerne ogsaa her har spillet en meget væsentlig Rolle til at forandre Overfladen er iøinefaldende for enhver, der har reist i Landet.

Paa lange Strækninger af den sydlige Kyst paa Island danner der sig foran Elvene Sandtunger, der øiensynligt er et Produkt af Elvenes og Havets forenede Arbeide. Disse Sandtunger, der afspærrer en indenfor liggende Vandansamling, er ofte mærkværdigt regelmæssigt uddannede. Foran *Alptafjörðr* ligger *Starmýrartangi* og lignende Tanger eller Tunger af Sand ligger foran *Lónfjörðr*, *Papafjörðr*, *Skarðsfjörðr*, *Hornafjörðr* og mange andre Steder. Deres Dannelselse er som før berørt et Produkt af Elvenes og Havets Virkninger. Idet det i Elvene strømmende Vand med dets Sand og Slam støder paa Havets Bølger og dets Strømme, mister det meget af sin Hastighed og breder sig samtidigt ud. Imellem Elvene og Havet er der et vist Mellemrum, hvor Vandenes Bevægelse holder hverandre i Ligevægt, og her dannes disse Sandbanker, der ligger saa paafaldende regelmæssigt foran Islands Sydkyst.

Ligesom Bræerne saaledes har ogsaa Elvene sin eroderende Virkning paa det Fjeld, hvorover de strømmer, *Jökulsá á Brú* har gravet sig en dyb Erosionsrende paa 20, 30, 40 Fods Dybde og mere. Men især er de af Elvene udskaarne Gjæl, eller, som de paa Island oftest kaldes, Gljúfr, dybe og

talrige, hvor Landet bestaar af blød Tuf. Ved *Kiðagil*, før man naar *Sprengisandr*, er et saadant dybt Erosionsleie, hvor Basaltsøiler staar i Randen over Gjelet. *Dalsággljúfr* kaldes et cirka 150 Fod dybt Gjel nær *Skaptárdalr*, men et af de pragtfuldeste Erosionsfænomener ved Elve iagttoges paa Tilbagereisen fra Vulkanerne af 1783 ved *Hørgsá* i det saakaldte *Hørgsággljúfr*, hvor Vandet havde gravet dybe, af steile Vægge omgivne Senge i den bløde Tuf. Jættegryder, der forøvrigt ikke synes at være meget hyppige paa Island, iagttoges her i *Hørgsággljúfr*.

Af Fosse er der paa Island ikke saa faa: *Jökulsá á Fjellum* danner *Dettifos*, *Skjálfandafljót* danner *Aldeyjarfoss*, *Godafoss* og *Ullarfoss*. Andre Fosse er *Hengifoss* i *Fljótsdalr*, hvilken dannes af en Elv *Hengifossá*, som falder ud øverst oppe ved *Lagarfljót*. *Fagrifoss* dannes af *Geirlandsá á Síðu* og styrter ned i et Gljúfr antagelig over 100 Fod dybt. Basalt ligger her over Tuf, og denne Bygning af Landet giver Anledning til Dannelsen af Fosse, idet den underliggende bløde Tuf ødelægges, medens den haarde Basalt staar igjen, hvorved en steil Væg fremkommer. En anden bekjendt Fos er *Seljalandsfoss* ved *Seljaland*, der styrter ned vestligst paa den Fjeldstrækning, hvorpaa *Eyjafjallajökull* hviler. Her er ogsaa Basalt i Søiler øverst ved Fossen, og Tuf i Bunden, og i denne bløde Bergart har det faldende Vand eroderet slig, at man kan gaa bag Fossen hele 50 til 60 Skridt, og beskyttet af det overhængende Berg kan man se Fossen fra dens Bagside. Aarsagen til, at en saadan Konfiguration fremkommer, er øiensynligt den, at den bløde Tuf, som her tillige optræder som et Konglomerat, er udvasket, og at den overliggende Basalt endnu har holdt sig. Lignende geologiske Forhold har fremkaldt *Skogarfoss* i *Eyjafjallasveit*; ogsaa her hviler Basalt i Søiler paa blød Tuf. Fossens Høide maalttes til 198 Fod.

Fosse fremkommer ogsaa paa Island derved, at en Sidedal

udmunder i en Hoveddal eller i en Fjord. Elven vil da styrte ud i Hoveddalen i en Fos; Exempler er Fosse i *Seydisfjörðr*: en ved *Vestdalseyri* paa Nordsiden og en ved *Hamnastaðir* paa Sydsiden af Fjorden. Her udmunder to Sidedale i højere Niveau over Fjorden, og begge Elve styrter sig i smaa Fosse ned mod Fjorden, men samtidigt har de dannet sig Erosionsleier, og disse følger paa enkelte Strækninger Gange af søileformet Basalt, fordi disse er Svaghedslinier i Basaltformationen, ligesom de er Linier af større Modstandsevne i Palagonittuf, hvor de undertiden staar op som Rygge i Erosionsleierne. Fosse fremkommer og, hvor Elve styrter sig ned i en Sækkedal, men de smukkeste og mærkeligste Fosse synes paa Island at fremkomme der, hvor en haardere Bergart, Basalt, ligger over den blødere, Tuf.

Til disse mere iøjnefaldende Erosionsmærker efter Vand kan endun føies de mindre storartede, men ikke mindre lærerige Erosionsmærker efter Vinden. Disse Mærker efter Vinden paa faste Stene er lidet paaagtede, men yderst kuriøse Fænomener. Paa Sandene, hvor Stene længe har ligget i Ro uden at omtumles af Elve, er *Vindmærker* ikke sjeldne; de er saaledes meget almindelige paa Sprengisandr, hvor store Strækninger ikke er udsat for Flomme og Jøkulhlaup, og hvor Stenene derfor kan ligge i Ro i lange Tidsrum. Her er Overfladen af Stene saare hyppigt ligesom arret, der er uregelmæssige Fordybninger af langstrakt Form og samtidigt har Stenene et Udseende, som om de var overstrøget med en tynd Fernis, de er glatte, som af en begyndende Politur. Disse Mærker, der staar tæt ved Siden af hverandre, kan ikke forvexles med glaciale Skuringsmærker, da de er mere uregelmæssige, konkave, aflange, ofte med en Længde paa nogle Centimeter og en Centimeter dybe. I Begyndelsen forstod jeg ikke Betydningen af disse besynderlige Mærker, som jeg stadigt iagttog især paa Hjørnerne af



de store Stene paa Sprengisandr. Men Mærkernes Beliggenhed og Forekomst viste snart tydeligt nok, at de var dannede derved, at Vinden har drevet Sandkorn afsted hen over disse ørkenagtige Strækninger, og ved Friktionen mellem de af Vinden drevne Sankorn mod Stenene er Vindmærkerne fremkomne.



# Høidemaalinger fra Island.

Af

AMUND HELLAND.

---

De Observationer, hvortil de her meddelte Høidemaalinger fra Island støtter sig, er anstillede paa en Reise paa Island i Sommeren 1881.

Som man vil se, er der en hel Del heterogene Ting, som er maalte, Gaarde, Vulkaner, Indsøer, Pasovergange, Vadesteder o. s. v. Da der paa Island er foretaget forholdsvis faa Høidemaalinger, har jeg imidlertid anseet det for bedst at medtage alle de maalte Høider.

Observationerne er anstillede med Aneroidbarometer, i Regelen med to, det ene tilhørende Universitets fysiske Kabinet, det andet tilhørende min Ledsager paa Islandsreisen, Cand. real *Andreas Hansen*. Begge Instrumenter viste sig at være brugelige og upaaklagelige, saavidt man kan forlange af Aneroidbarometre, og Forandringen, som de undergik paa Reisen, var ikke stor.

Til Sammenligning og til Udregning af vore Iagttagelser benyttedes Barometerhøiderne og Temperaturerne iagttagne paa de tre islandske meteorologiske Stationer, nemlig i Berufjörðr, paa Grimsey og i Havnafjörðr, hvilke Observationer velvilligen meddeltes mig af Chefen for det meteorologiske Institut i Kjøbenhavn, Hr. Kaptein *N. Hoffmeyer*.

Hver Høide er altsaa i Regelen Middeltal af to Observationer, undertiden af fire eller flere. Hvilken Nøiagtighed Maalingerne kan gjøre Fordring paa, tør jeg ikke angive med Sikkerhed; selv det bedste Aneroidbarometer kan, som bekjendt, undertiden have sine Luner og være trægt, især naar man kommer fra større Høider. Men i det hele tror jeg, saaledes som nogle senere Sammenligninger vil vise, at Høidemaalingerne er noksaa gode, og de tre meteorologiske Stationer paa Island ligger taaleligt bekvemt, saa man kan interpolere uden Frygt for store Feil; derhos var Barometervariationerne i Juli og August 1881 paa et Par Dage nær ikke meget voldsomme.

Til at vise, hvorvidt Maalingerne med de to Barometre stemte overens, og hvorledes Maalingerne i det hele stemmer indbyrdes, hidsættes først Iagttagelser fra *Mývatn*.

Mývatus Høide over Havet.

Barometer A.	Barometer B.
302 Meter.	296 Meter.
304 —	290 —
312 —	300 —

Desuden haves med Barometer A følgende 11 Maalinger af Mývatns Høide: 291, 293, 298, 290, 292, 297, 308, 298, 313, 308, 303 Meter. Middeltallet af disse Iagttagelser er 300 Meter; Forskjellen i de 17 Maalinger er saaledes 10 Meter til den ene Side og 13 Meter til den anden. Naar man tager i Betragtning, at Mývatn ligger temmelig fjernt fra alle tre Stationer, og at Variationerne paa Lufttrykket i hine Dage (7de til 14de Juli) tildels var betydelige, saa kan ikke større Overensstemmelse ventes paa denne Høide og med disse Instrumenser.

Fremdeles hidsættes til Sammenligning følgende Maalinger: *Geysir* ligger efter *Bunsen* i 110 Meters Høide (Middeltal af 112.8 og 107.2 Meter). *Kjerulf* fandt Høiden 95.4

Meter (304 Fod, hvilket er Middeltal af 320.8 Fod og 287.1 Fod = 100.7 Meter og 90 Meter). Efter mine Maalinger er Høiden 117 m., Middeltal af 116.1 og 118.5 m. Høiden af *Pingvallavatn* er efter *Gunnlaugsson* 307 Fod (96.3 Meter), efter *Kjerulf* 347 Fod (108.9 Meter). Vore Maalinger giver 108 Meter (Middeltal af 109.5 og 106.1).

Saa vel disse Sammenligninger som Iagttagelser, anstillede paa forskjellige Steder ved Havets Niveau, tyder paa, at Maalingerne ikke er behæftede med større Feil.

Foruden disse Høider har jeg tillige 51 Maalinger fra Lakis Vulkanrække, de bekjendte Vulkaner fra 1783 i Skaptafellsyssell, hvilke Maalinger ikke her er medtagne, da det er bekvemmere at anføre dem i en Specialbeskrivelse af Vulkanrækken.

## Norðr Múlasýssla.

	Høide over Havet.	
	Meter.	Fod.
Bjolfur i Seydisfjørðr . . . . .	c. 1005	c. 3203
Fladtrykte Stammer i graa Tuf ovenfor Hamnastaðr i Seydisfjórðr . . . . .	88	280
Lagarfjót . . . . .	26	83
Største iagttagne Dyb i Lagarfjót*) . . .	÷ 110	÷ 351
Høieste Punkt paa Fljótsdalsheiði. . . . .	665	2120
Hákonarstaðir i Jökulsdalr . . . . .	310	988
Jökulsá á Brú ved Hákonarstaðir . . . . .	263	838
Viðihöll, høiest liggende Gaard paa Jökuldalsheiði . . . . .	533	1699
Høieste Punkt paa Jökuldalsheiði mellem Hákonarstaðir og Lone . . . . .	613	1954
Høieste Punkt mellem Lone og Møðrudalr paa Møðrudalsvegr . . . . .	805	2566
Indsø ved Gaarden Lone paa Møðrudalsvegr . . . . .	531	1692

\*) Da Indsøens Dyb er 110 Meter, Høiden over Havet 26 Meter, ligger Bunden 84 Meter (= 268 Fod) under Havets Overflade.

	Meter.	Fod
Møðrudalr . . . . .	469	1495
Vegaskarð . . . . .	485	1546
Viðidalr . . . . .	462	1473

### Norðr Þingeyjarsýsla.

Biskupsháls . . . . .	519	1654
Grimstaðir . . . . .	432	1192
Jökulsá á Fjellum, Færgested ved Grimstaðir	374	1192

### Suðr Þingeyjarsýsla.

Hraun (Lavastrøm af 1875) ved gamle Ridevei til Reykjahlíð . . . . .	368	1173
Høieste midtre Krater af Februar 1875 . .	431	1374
Lavafri Mark paa Heien nedennnder . . .	389	1240
Reykjahlíð Gaard . . . . .	302	963
Mývatn . . . . .	300	956
Høit Krater i Leihrhnúkrs Række, Rand . .	586	1868
Fod af samme Krater . . . . .	560	1785
Helviti, Indsø og Krater . . . . .	563	1794
Helviti, laveste Rand . . . . .	584	1861
Krafla . . . . .	826	2633
Námafjall . . . . .	499	1590
Dyndvulkaner ved Námafjall . . . . .	281	896
Hverfjall . . . . .	454	1447
Vindbelgjarfjall . . . . .	529	1686
Top af Miklaey i Mývatn . . . . .	320	1020
Þrengzliborg, Krater øst for Garðr ved Mývatn	400	1275
Heilaksdalr, Dal paa Vei til Fremrinámár .	643	2049
Ketill, Krater ved Fremrinámár, Rand . . .	966	3079
Bund i samme Krater . . . . .	882	2811
Gautlønd . . . . .	301	959

	Meter.	Fod.
3 Indsøer paa Veien mellem Gau- lønd og Lundarbrekka . . . . .	{ østligste . . . 404 { midtre . . . 393 { vestligste . . 406	1288 1253 1294
Friktionsstriber i Høiden over Lundarbrekka	356	1135
Stóruvellir i Barðardalr . . . . .	221	704
Skjálfandafjót ved Stóruvellir . . . . .	213	679
Mýri i Barðardalr . . . . .	301	959
Friktionsstriber nordligt for Kiðagil . . . . .	675	2151
Teltplads ved Kiðagil . . . . .	565	1801
Sprengisandr 1 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> Times Ridt fra Kiðagil . . . . .	728	2320
Sprengisandr, høieste Punkt paa Veien . . . . .	879	2802

## Rangárvallasýssla.

Tungnaá, Vadested vest for Þóristungr . . . . .	460	1466
Laveste Punkt af Heklas Lavastrøm af 1878	468	1492
Laveste Punkt af Heklas Lavastrøm af 1845	106	338
Stóruveller . . . . .	118	376
Þjorsá ved Þjorsárholt . . . . .	87	277
Oddi . . . . .	31	99
Paradishellir . . . . .	57	182
Skógar . . . . .	31	99
Nederste Del af Skógarfos . . . . .	23	73
Øverste Del af Skógarfos . . . . .	85	271

## Árnessýssla.

Hvítá nær Gröf . . . . .	61	194
Geysir . . . . .	117	373
Laugarvatn . . . . .	70	223
Hrafnagjá ved Rideveien . . . . .	292	931
Almannagjá Bund . . . . .	120	382
Almannagjá, høieste Punkt paa nordvestre Side	155	494
Almannagjá, ved Rideveien paa nordvestre Side	143	456



	Meter.	Fod.
Almannagjá, høieste Punkt paa sydøstre Side	136	433
Þingvellir . . . . .	108	344
Þingvallavatn . . . . .	106	338
Hellisskarð . . . . .	375	1195
Reykir Kirke . . . . .	49	156
Villingaholt . . . . .	13	41

## Vestr Skaptafellssýsla.

Loptsalahellir . . . . .	30	96
Høidepunkt mellem Reynir og Vik . . . . .	197	628
Vik . . . . .	40	127
Kerlingardalr, Munding ved Høðabrekka Fjeld	19	61
Høðabrekka Gaard . . . . .	128	440
Háfell ved Høðabrekka . . . . .	292	931
Mýrdalssandr nedenfor Høðabrekka . . . . .	38	121
Mýrdalssandr mellem Høðabrekka og Hafrsey	61	194
Mýrdalssandr ved Hafrsey . . . . .	104	331
Mýrdalssandr, antagne høieste Punkt . . . . .	121	386
Buland . . . . .	139	443
Skaptá nær Buland . . . . .	135	430
Høieste Punkt mellem Skaptárdalr og Holt . . . . .	307	979
Holtslo . . . . .	79	252
Hørgsdalr . . . . .	69	220
Þorisvatn blandt Fiskivøtn . . . . .	594	1893
Geirlandsvatn . . . . .	205	653
Eintunahals . . . . .	221	704
Nupstaðr . . . . .	68	217
Hverfisdalssæli . . . . .	818	2607
Bjørn . . . . .	989	3152

## Austr Skaptafellssýsla.

Skeidarárjökull, laveste Punkt . . . . .	61	194
Svinafell . . . . .	98	312

	Meter.	Fod.
Top af Moræne ved Svinafellsjökull . . . . .	136	433
Punkt paa Bræen bag Morænen . . . . .	178	567
Punkt paa Bræen længer inde . . . . .	223	711
Fod af Moræne ved Virkesjökull . . . . .	111	357
Top af samme . . . . .	155	494
Sandfell . . . . .	92	293
Knappaveller . . . . .	59	188
Breiðamerkrjökull vest for Jökulsá . . . . .	22	70
Jökulsá ved Udløbet af Breiðamerkrjökull . . . . .	21	67
Laveste Del af Breiðamerkrjökull øst for Jökulsá . . . . .	11	35
Reynivellir . . . . .	44	104
Bjarnanes . . . . .	16	51
Almannaskarð, høieste Punkt . . . . .	147	469
Lónsheiði, høieste Punkt . . . . .	386	1230

## Sudr Múlasýsla.

Starmyri . . . . .	23	73
Gammel Strand ved Starmyri . . . . .	27	86
Berufjarðarskarð . . . . .	669	2132
Skuret Blok nær Berufjarðarskarð . . . . .	414	1320
Høskulstaðir . . . . .	110	351
Tjern paa Breiðdalsheiði . . . . .	420	1339
Høieste Punkt paa Breiðdalsheiði . . . . .	464	1479
Vand ved Stefanstaðir . . . . .	154	491
Þingmúli . . . . .	118	376
Hallormstaðir . . . . .	58	185
Ketilstaðir . . . . .	49	156
Fjaðarheiði, Høidepunkt paa Vinterien . . . . .	625	1992
Fjaðarheiði, Høidepunkt paa Sommerveien . . . . .	609	1941
Høide af Skuringsmærker paa Fjaðarheiði . . . . .	575	1833
Gang af Dobbeltspat i Eskifjørðr . . . . .	105	335

# Ein Paar synthetische Methoden in der metrischen Geometrie mit Anwendungen.

VON

ELLING HOLST.

---

Als *Poncelet* die geometrischen Eigenschaften in *descriptive* und *metrische* eintheilte und den Beweis dafür gab, dass jede metrische Eigenschaft als ein specieller Fall einer umfassenderen projectivischen anzusehen ist, wies er gleichzeitig seinen Nachfolgern die projectivischen Eigenschaften als ein Gebiet an, wo rege Studien ebenso reichhaltigen als fundamentalen Stoff finden könnten und die späteren Geometer haben auch, dieser Anweisung folgend, die projectivische Geometrie mit Vorliebe gepflegt. Dies ist in dem Grade der Fall gewesen, dass nach dem Beispiele *Cayley's* bekanntlich sogar eine neue Maassbestimmung eingeführt ist, die nicht mehr die thatsächlichen Verhältnisse wiedergiebt, und dies jedenfalls theilweise um *einen durchgeführten Dualismus auch für metrische Eigenschaften zu erhalten*. Zwar giebt diese Theorie wie schon erwähnt nicht mehr die stattfindende Geometrie, vielmehr eine neue, welche die gewöhnliche als einen speciellen Fall enthält, nämlich, wenn die *Cayley-Klein'sche* maassbestimmende Fläche 2. O. in einen ebenen Kegelschnitt (oder unendl. entfernten Kugelskreis) ausartet. Wie es aber *Klein* gezeigt hat, fällt die *Cayley'sche* Geometrie

mit der sogenannten »*Nicht-Euclidischen*« zusammen, und die von *Cayley* ersonnene Erweiterung hat sich somit als eine in den tiefsten Naturgesetzen der geometrischen Axiome begründete erwiesen.

Doch scheint die wahre Maassbestimmung, obgleich sie nicht einen descriptiven Dualismus aufweisen kann, des Studiums um so werther, als durch die einseitige Lenkung der Aufmerksamkeit aller Geometer auf die projectivischen Eigenschaften die metrische Geometrie eine Zeitlang vernachlässigt scheint.

Es ist aber wieder ein Verdienst *Poncelet's* den ersten Anfang einer neuen und fundamentalen Theorie der metrischen Eigenschaften ermöglicht zu haben, indem er auf die unendlich ferne Gerade und die »Kreispunkte« einer Ebene hinwies. Seine Andeutungen hierüber scheinen doch erst spät verfolgt zu sein. Wir verdanken *Salmon*, *Laguerre*, *Chasles*, *Darboux* u. m. die weitere Entwicklung der fruchtbaren Lehre von den Geraden nach den Kreispunkten u. s. w., was eigentlich die metrische Geometrie bildet. Die Einführung der unendlich fernen Elemente des Kreises, welches von der Seite *Poncelet's* ursprünglich geschah um die metrischen Eigenschaften von projectivischem Standpunkte aus ins Auge fassen zu können, hat sich dadurch gerade als das wahre Apparate für metrische Untersuchung gezeigt.

Man hat aber und mit allem Recht gegen die synthetische metrische Geometrie angeführt, dass sie noch ohne durchschlagende Methode ist. Wenn es zum Beispiel eine geometrisch definirbare Grösse durch andere gegebenen explicite auszudrücken gilt oder doch das Gesetz anzugeben, welches die Grössen zusammenknüpfen, ist man, sobald man synthetisch vorzugehen wünscht, auf ein Meer von Willkürlichkeiten hinausgeworfen. Selbst die Arbeiten *Darboux's* scheinen in Betreff einer methodischen Synthesis nur zerstreute

allerdings glänzende Einzelheiten darzubieten und seine Methode ist eigentlich immer eine analytische.

Ohne zu behaupten, dass ich diese wichtige Lücke in nennenswerther Weise auszufüllen vermöge, will ich doch im Folgenden eine Methode angeben, deren ich mich seit einigen Jahren ziemlich durchgehend mit Erfolg bedient habe, um synthetisch rein metrische Eigenschaften zu entdecken oder beweisen.

Die Methode habe ich zum ersten Male in einem Aufsatze in Math. Ann. 11tem Bande: »Ein paar allgemeine metrische Sätze für algebraische Kurven« angewandt ohne doch auf methodische Einzelheiten einzugehen. Später habe ich die wichtigsten Punkte der Methode selbst mit einigen Anwendungen derselben während eines Aufenthaltes in Paris 1879—80 in der *société mathématique de France* vorgetragen und im *bulletin* der gen. Gesellsch. veröffentlicht. Eine Note, die eben unterm Drucke im »Archiv f. Math. og Naturv.« ist, enthält als Supplement hierzu eine auf analoge Principien gebaute Methode, für welche die Schlussweise eine etwas andere ist. Die folgende Abhandlung giebt ausser einer eingehenderen Entwicklung beider Methoden noch eine Reihe metrischer Sätze, theils als Beispiele und Anwendungen theils als neue Beiträge zur Kenntniss der metrischen Eigenschaften ebener und räumlicher Figuren.

Namentlich werden diejenigen Sätze von Interesse sein, welche eine *metrische Definition gewisser Invarianten* gewähren. Daneben verdienen vielleicht auch einige Betrachtungen über einen stattfindenden Dualismus zwischen *Strecke* und *Sinus*, wie auch gewisse Bemerkungen die »focalen« Geraden und Ebenen betreffend die Aufmerksamkeit der Geometer.

---



## Kap. I.

## Neue synthetische Methoden.

## I. Principielle Ausgangspunkte.

1. Die im Folgenden behandelten Relationen und Functionen sind, wenn anders nicht ausdrücklich gesagt wird, alle *algebraisch*, die Anzahl der Variabeln, nach den Umständen eine oder mehrere. Die folgenden einfachen Theoreme bilden den Ausgangspunkt der Methoden:

I. *Eine Function,  $F$ , mehrerer anderen  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , ist absolut constant, wenn sie nicht einen gewissen gegebenen Werth annehmen kann.*

Dieser Satz, der allgemein bekannt ist für eine Variable, kann auf die folgende elementare Weise auf mehrere Variabeln erweitert werden. Giebt man nämlich allen in den  $f_1, f_2, \dots, f_n$  enthaltenen Variabeln bis auf eine constante Werthe, wird  $F$  nunmehr nur von dieser einzigen Variablen abhängen. Kann sie nun einen gewissen Werth nicht annehmen, ist sie constant und enthält die genannte Variable *nicht*. Denn es musste dies in einem Gliede sein, welches verschwand, indem man den übrigen Variabeln die constanten Werthe beilegte. Da diese Werthe jedoch ganz willkürlich waren, muss das Glied für eine unendliche Anzahl solcher in jeder Variablen verschwinden, d. h. identisch Null sein. Die genannte, und ebenfalls, in Folge der Willkürlichkeit der Wahl, jede andere Variable kommt somit *nicht* in  $F$  vor;  $F$  ist absolut oder identisch constant, was zu beweisen war.

2. II. *Ein Product von einer endlichen Anzahl Factoren verschwindet resp. wird unendlich nur gleichzeitig mit wenigstens einem der Factoren.*

III. *Eine Summe von einer endlichen Anzahl Addenden*

wird  $+\infty$  resp.  $-\infty$  nur gleichzeitig mit wenigstens einem der Addenden.

Es ist hier zu bemerken, dass die beiden letzten selbstverständlichen Sätze sich verhalten wie Potenz- und Exponentenform (Numerus- und Logarithmenform) eines und desselben Satzes. Nimmt man die Logarithmen des Products und der Factoren im Satze II, bekommt man Satz III.

Aus den beiden ersten einfachen Principien geht die nachstehende Methode hervor, die wie hier formulirt namentlich geometrischer Anwendung fähig ist, doch aber muthmasslich auch anderswo Dienste zu leisten vermag. Sie kann genannt werden:

## II. Die Methode der unbestimmten Exponenten.

3. Def. Eine Reihe von Funktionen,  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , soll gesagt werden ein zusammenhängendes System (système continué) zu bilden, wenn keine derselben 0 oder  $\infty$  wird, ohne dass der eine dieser singulären Fälle wenigstens mit einer der anderen gleichzeitig eintritt.

Ex. 1. Die Seiten  $a, b, c$ , eines Dreiecks, der Flächenraum  $T$ , und der Radius  $R$  des umgeschriebenen Kreises bilden ein zusammenhängendes System. Die Seite  $a$  z. B. verschwindet nur, wenn entweder  $T$  oder  $R$  verschwindet;  $R$  wird  $\infty$  nur, wenn entweder einige der übrigen Grössen  $= \infty$  oder wenn  $T=0$  ist, u. s. w.

Ex. 2. Die Abstände des Centrums eines Kreises von einem Punkte und dessen Polare bilden ein zus. häng. Syst.; denn der eine Abstand verschwindet dann und nur dann, wenn der andere unendlich wird.

Das Aufsuchen von zusammenhängenden Systemen kann bei geometrischer Anwendung rein geometrisch ausgeführt werden, nämlich durch synthetische Figurenbetrachtung ohne analytische Kalkül.

4. Def. *Besitzt ein zusammenhängendes System  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , die Eigenschaft, dass ein Product*

$$f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha_n}$$

*seiner Funktionen, jede auf eine gewisse Potenz (mit constantem, pos. oder. neg. Potenzexp.) erhoben, eine Constante ist, wird das System vollständig genannt.*

*Beisp.* Die beiden in Art. 2 genannten Systeme sind vollständig, indem im ersten Beisp.:

$$T. R. a^{-1} b^{-1} c^{-1} = \frac{1}{4},$$

und im zweiten, wenn die Abstände  $\alpha$  und  $\beta$  und der Kreisradius  $R$  sind:

$$\alpha \beta = R^2$$

5. *Die Methode der unbestimmten Exponenten beabsichtigt, ob ein gegebenes zusammenhängendes System vollständig ist, zu untersuchen und wendet hierfür die Sätze I und II an.*

Es gilt somit zu zeigen, dass das Product

$$f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha_n} \quad (1)$$

für gewisse bestimmten aber noch unbekannten Exponenten *nicht verschwindet oder unendlich wird*. Weil man a priori mit den Zeichen der Exponenten unbekannt ist, ist es nothwendig die Untersuchung auf beide Singulärwerthe zu richten.

Um die Operationen zu erleichtern werde ich die folgende Modifizirung der gewöhnlichen Bezeichnung unendlich kleiner oder grosser Werthe gebrauchen.

6. Wenn man mit  $\varepsilon$  oder  $\varepsilon^1$  eine unendlich Kleine 1ster Ordnung bezeichnet, soll *jede andere unendlich Kleine derselben Ordnung ebenfalls mit  $\varepsilon^1$* , überhaupt jede unendl. Kleine  $n^{\text{ter}}$  Ordnung mit  $\varepsilon^n$ , bezeichnet werden. In Konsekvenz hiermit wird dann jede endliche Grösse mit  $\varepsilon^0$  und jede unendliche Grösse  $n^{\text{ter}}$  Ordn. mit  $\varepsilon^{-n}$  bezeichnet.

Diese Bezeichnung, die zu Widersprüchen führen würde, wenn z. B. zwei unendl. Kleinen derselben Ordnung eine Differenz höherer Ordn. hätten, oder überall wo es sich um eine algebraische Summe mehrerer unendlich Kleinen handelte, leistet hier wesentliche Hülfe, ohne zu Widersprüchen zu verleiten, *weil die betreffenden Grössen alle Factoren sind.*

Wenn also in unserem Producte (1) der eine von den Factoren z. B.  $f_1$  eine unendlich Kleine  $m^{\text{ter}}$  Ordn. ist, müssen unserer Voraussetzung gemäss gleichzeitig gewisse Andere unendlich gross oder klein von verschiedenen Ordnungen sein, damit das Product endlich bleibe. Dies letzte bekommt somit einen Werth:

$$\varepsilon^{\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \dots + \alpha_n m_n}$$

wo  $m_1, m_2, \dots, m_n$  gewisse pos. oder neg. Zahlen oder 0 sind, jenachdem der einzelne Factor  $f$  unendlich klein, unendl. gross oder endlich wird. Bleibt jedoch das ganze Product endlich, muss der obige Werth gleich

$$\varepsilon^0$$

sein, was eine Gleichung giebt:

$$0 = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \dots + \alpha_n m_n = \sum_1^n \alpha_i m_i \quad (2)$$

7. *Umgekehrt drückt die Gleichung (2) eine von den Bedingungen dafür aus, dass unser Product (1) nicht mit  $f_1$  verschwindet* — eine von den Bedingungen, indem es nämlich denkbar ist, dass  $f_1$  unter verschiedenen Bedingungen verschwindet. Hierdurch wird man zur folgenden Probe, ob das zusammenhängende System  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , vollständig sei, — und in diesem Falle gleichzeitig zur Bestimmung der unbekannten Exponenten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , — geleitet.

Man setze zunächst jede der Grössen  $f$  der Reihe nach, und jede in jedem neuen Falle, der möglich ist, gleich  $\varepsilon^1$  und

suche jedesmal diejenige Gleichung (2), welche der betreffende Fall liefert, indem man nur solche Fälle ausser Betracht lässt, welche schon behandelt sind. Dann setze man ebenfalls die Grössen nach und nach gleich  $\varepsilon^{-1}$ , wobei es gleichfalls geschieht, dass mehrere Fälle im Laufe der früheren Operationen behandelt sind. Man bekommt somit eine endliche Anzahl Gleichungen von der Form (2) und überhaupt mehr als es Verhältnisse zu bestimmen zwischen den unbekannten  $\alpha$ 's giebt.

*Wenn alle diese Gleichungen von demselben Systeme  $\alpha$ 's befriedigt werden, ist man sicher, dass das Product (1) constant ist.*

Denn dem Satze II zufolge kann unser Product überhaupt nur dann 0 oder  $\infty$  werden, wenn wenigstens eine der Grössen  $f$  einen dieser Singulärwerthe annimmt; unsere Gleichungen zeigen aber, dass das Product in allen solchen Fällen gleich  $\varepsilon^0$  d. h. endlich bleibt. Nach dem Satze I muss es somit constant sein.

Wir haben jetzt nur noch den constanten Werth zu bestimmen, welches wie gewöhnlich durch ein specielles Beispiel geschieht.

*Wenn dagegen nicht alle Gleichungen durch dasselbe System  $\alpha$ 's befriedigt werden, sondern Widersprüche enthalten, bedeutet dies, dass unser System nicht vollständig ist, und es gilt dann neue Factoren hinzuzufügen um das System zu vervollständigen.*

8. Als geometrisches Beispiel, wollen wir die ganze Methode zum Beweise der einfachen ersten Formel im Art. 2 anwenden. Die Untersuchung mag beispielweise von der Beobachtung ausgehen, dass der Flächenraum  $T$  gleichzeitig mit einer Seite verschwindet, wenn nur nicht diese focal wird, oder von derjenigen, dass  $T$  in einem Falle verschwindet, indem gleichzeitig der Radius  $R$  unendlich wird.



Man sieht zunächst leicht ein, dass  $T$ , das Product  $abc$  und  $R$  ein zusammenhängendes System bilden; denn:

1) Wenn  $T$  verschwindet, wird entweder:

a)  $abc$  verschwinden, oder

b)  $R$  unendlich werden.

2)  $T = \infty$  giebt sowohl  $abc$  als  $R = \infty$ .

$abc = 0$  giebt entweder  $T = 0$ , identisch mit 1 a, oder, dass wenigstens eine Seite focal ist d. h.:

3)  $abc = 0$ ,  $R = 0$

Weder  $abc = \infty$ , noch  $R = 0$  oder  $R = \infty$  bietet wesentlich neue Singularitätsfälle dar.

Man bekommt somit alles in Allem vier Gleichungen von der Form (2) nämlich den vier Fällen 1 a, 1 b, 2 und 3 entsprechend zur Bestimmung der beiden Verhältnisse zwischen den  $\alpha$ 's im Producte

$$T^{\alpha_1}(abc)^{\alpha_2} R^{\alpha_3}.$$

1 a. Nähern sich die Endpunkte der Seite  $a$  bis zum Zusammenfallen, zeigt die Figur, dass  $a$  und  $T$  unendlich kleine derselben Ordnung werden, während  $b$ ,  $c$  und  $R$  im Allgemeinen endlich bleiben. Man setze also  $T$  und  $a = \varepsilon^1$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $R$  sammt dem ganzen Producte  $= \varepsilon^0$ , und bekommt die Gleichung:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

1 b. Der Winkel  $A$  wird nach  $2\pi$  genähert. Eine elementare Figurenbetrachtung zeigt dann leicht, dass  $R$  unendlich gross und  $T$  unendl. klein derselben Ordnung werden. Weil jedoch  $abc$  endlich bleibt, hat man:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0.$$

2. Eine Ecke des Dreiecks wird ins Unendliche entfernt. Man bekommt, wenn  $T = \varepsilon^{-1}$ , ebenfalls zwei Seiten und  $R = \varepsilon^{-1}$ , d. h.:

$$-\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0.$$

3. Wenn  $a$  focal gewählt wird, während  $A$  und  $\sin A$  endlich bleiben, zeigt z. B. die Formel

$$R \sin A = \frac{a}{2},$$

dass  $R$  und  $a$  derselben Ordnung sind d. h. weil  $T$ ,  $b$  und  $c = \varepsilon^0$ :

$$a_2 + a_3 = 0.$$

Weil nun diese vier Gleichungen alle vom Werthsysteme:

$$\frac{\alpha_1}{1} = \frac{\alpha_2}{-1} = \frac{\alpha_3}{1}$$

befriedigt werden, hat man sowohl, dass das System *vollständig* ist, als besonders die Formel

$$\frac{TR}{acb} = K, \text{ eine Constante.}$$

Um letztere zu bestimmen, wähle man z. B. ein rechtwinkliges Dreieck mit  $c$  zur Hypotenuse. Dann ist:

$$T = \frac{1}{2} ab, \quad R = \frac{1}{2} c$$

woraus

$$K = \frac{1}{4}.$$

Dass die somit erhaltene Formel

$$R = \frac{abc}{4T}$$

eine sehr bekannte ist, die man viel leichter anders beweist, wird ihr wohl nicht ihr Interesse und ihren Character als durchsichtiges Beispiel benehmen.

9. Es führt zuweilen gewisse Erleichterung mit sowohl beim Aufsuchen der gehörigen Funktionen  $f$  als bei der spe-

ciellen Untersuchung des unendl. Grossen und Kleinen, dem ganzen Systeme irgend eine Bedingung aufzulegen, innerhalb welcher es sonst variiren kann. Wenn man z. B. einen Factor  $f$  constant, doch natürlicherweise nicht  $= 0$  oder  $\infty$ , setzt werden die Bedingungen seines Verschwindens oder Unendlichwerdens von der Untersuchung ausfallen; seine Potenz wird dann in der schliesslichen Constantenbestimmung ihre Festsetzung finden. Die etwas vergrösserten Schwierigkeiten, welche bei den übrigen Fällen von Verschwinden und Unendlichkeit gleichzeitig von der neuen Bedingung beeinflusst, eintreten, sind oft nicht grösser, als dass die gesammte Operation etwas abgekürzt wird.

Die Art von Erleichterung, die auf solche Weise erreicht wird, kann insofern mit derjenigen verglichen werden, welche man in der analytischen Geometrie durch specielle Wahl des Koordinatensystems bewerkstelligt, da man ohne die Allgemeinheit des Resultats zu verändern, mit einem durch besonderes Arrangement vereinzelter Apparate operirt. Dass die Allgemeinheit dieselbe geblieben, beruht darauf, dass man sich z. B. den Factor  $f$  constant denken kann ohne deshalb einen speciellen Werth für denselben zu fixiren; eigentlich hält man ihn nur einsweilen fest, um ihn später variiren zu lassen. Wenn man auf diese Art, um uns zu dem schon ausgearbeiteten Beispiele zu halten, den Radius des umgeschriebenen Kreises constant setzt, beweist man, dass für ein einem Kreise eingeschriebenes Dreieck das Product der Seiten mit dem Flächeninhalte proportional ist. Durch die Constantenbestimmung findet man das Verhältniss gleich  $\frac{R}{4}$  und man hat den Satz in derselben Allgemeinheit wie früher.

10. Umgekehrt bemerkt man, dass der Umstand, dass die Constante nicht eine Zahl ist, sondern metrische Grössen enthält, kennzeichnet, dass man dann statt des betreffenden

vollständigen Systems ein anderes hätte setzen können, von welchem ersteres ein specieller Fall wäre.

Eine andere wichtige Folgerung, wenn die Constante metrische Grössen enthält, ist, dass man durch Nullsetzen der Constante oder eines ihrer Factoren eine Identität verschafft, die in gewissen Fällen von *descriptivem* Character wird, und dass auf diese Weise *ein descriptiver Satz sich als specieller Fall eines metrischen zeigt*.

Ein Beispiel wird dies näher erleuchten.

Wenn man einem festen Kreise mit dem Radius  $R$  ein Dreieck  $ABC$  der Art einschreibt, dass zwei seiner Seiten,  $AB$  und  $AC$  einen anderen festen Kreis mit dem Radius  $r$  berührt, dann wird die Sehne  $K$ , welche letzterer von der dritten  $BC$  abschneidet, durch folgende Formel gegeben, wo weiter  $\gamma$  die Centrallinie der beiden Kreise,  $h_a$  die Höhe von  $A$  und  $p_1, p_2, p_3, p_4$  die Abstände  $A$ 's von den vier gemeinschaftlichen Tangenten bedeuten:

$$K = \frac{1}{\gamma} \sqrt{(\gamma^2 - R^2 - 2Rr)(\gamma^2 - R^2 + 2Rr)} \frac{h_a}{\sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4}}$$

Wenn hier der eine Wurzelfactor der Constante gleich 0 gesetzt wird, verschwindet  $K$  identisch, was die descriptive Bedeutung hat, dass auch die dritte Seite bei einem solchen Systeme Kreise *identisch*, d. h. wenn für eine dann für alle Lagen des Dreiecks den Kreis berührt, ein Satz, dessen Bedeutung bekannt ist.

Dass in diesem Beispiele die Constante mit zwei Factoren erscheint, während die früheren Geometer nach *Euler*, so viel ich weiss, nur die durch das Verschwinden des zweiten Factors enthaltene Bedingung bemerkt zu haben scheinen, mag dazu dienen, die Sicherheit der gegenwärtigen Methode darzulegen, indem sie im Gegensatze zum älteren synthetischen Raisonement mit derselben Leichtigkeit und Vollständigkeit sowohl imaginäre als reale Elemente in Betracht zieht.

### III. Allgemeineres über descriptive Eigenschaften als Specialfälle. Invarianten metrisch definirt.

11. Die in der vor. Art. hervorgehobene Auffassung gewisser descriptiven Eigenschaften als specielle Fälle metrischer, könnte in einigem Gegensatze zu der bisher gewöhnlichen, nach welcher ein metrischer Satz ein Specialfall eines descriptiven\*) ist, zu stehen scheinen. Es ist indessen klar, dass die eine Auffassung keineswegs die andere ausschliesst und namentlich ist es von Wichtigkeit zu bemerken, dass irgend welches descriptive Element durch folgendes allgemeine Raisonement in metrische Form übergeführt werden kann:

Die allgemeinste Classe descriptiver Eigenschaften, die allerlei Arten solcher umfasst, ist dadurch characterisirt, *dass sie zwischen zwei Individuen, deren entweder das eine oder beide entweder absolut bestimmt sind oder bedingungsweise abgegränzten bestimmten Unendlichkeiten angehören, eine Identitet aufstellt, welche ohne die in den Bedingungen enthaltenen Festsetzungen im Allgemeinen nicht stattfinden würde.*

Beisp. Dass drei Geraden in derselben Ebene durch denselben Punkt gehen. Die eine Gerade gehört der durch die zwei anderen bestimmten Unendlichkeit, was ohne ausdrückliche Bedingung nicht allgemein stattfindet. Dass zwei Raumkurven einen Punkt gemein haben, d. h. ein Punkt der einen ist identisch mit einem der anderen. Dass zwei Kurven in derselben Ebene einander berühren; zwei der Schnittpunkte sind identisch geworden. U. s. w. *In jedem solchen Falle wird, wenn die descriptive Identitet aufgehoben wird, ein metrisches Element erscheinen* (die drei Geraden einen Dreiecksflächenraum begränzen, — die Raumkurven einen Maximal-

---

\*) Nach *Poncelet* eines projectiven; jeder projectiven metrischen kann aber wieder descriptive Einkleidung gegeben werden.



resp. Minimalabstand mehr bekommen; — ein Punktabstand mehr zwischen den Schnittpunkten der beiden ebenen Kurven entstehen; u. s. w.). *Verschwindet das neue metrische Element, kann die descriptive Eigenschaft wieder auftreten.*

12. Jede descriptive Eigenschaft ist *invarianter Natur*. Nun ist aber eben gezeigt worden, dass metrisch definirbare Grössen existiren müssen, durch deren Verschwinden Eigenschaften descriptiver Art sich ausdrücken lassen. Hieraus ersteht dann das allgemeine Problem, *die einfachste metrische Grösse (oder Grössen) zu finden, deren Verschwinden eine gegebene descriptive Eigenschaft ausdrückt.* Dies soll heissen *die entsprechende Invariante metrisch zu definiren.*

So ist die metrische Grösse, die gleich Null gesetzt, dass drei Punkte in einer Geraden liegen, ausdrückt, *das Areal des Dreiecks zwischen den Punkten*; die Grösse, deren Verschwinden, dass zwei Geraden in einer Ebene liegen angiebt, ihr *Moment*, d. h. *ihr Abstand multiplicirt mit Sinus des von ihren Richtungen gebildeten Winkels.*

Solche metrische Definitionen einiger Invarianten werden später gegeben.

#### IV. Anwendung des Principes III von endlichen Addenden.

13. Das Princip III, dass eine *Summe von einer endlichen Anzahl endlicher Addenden endlich ist*, ist schwieriger anwendbar. Es wird doch und namentlich dann von Bedeutung, wenn es zu untersuchen gilt, ob eine *gegebene symmetrische Function constant ist.*

Wenn eine symmetrische Function in polynomischer Form gegeben ist, sind alle ihre Glieder einerlei gebaut. Wird eine solche Summe unendlich, sind die Unendlichkeitsbedingungen irgend eines Gliedes zu untersuchen, womit man auf die Anwendung von Raisonementen, mit der früher angegebenen vergleich-

bar, zurückgeführt ist. Man denke sich nämlich um die nothwendige Allgemeinheit zu handhaben das einzelne Glied als einen Bruch, dessen Zähler und Nenner Producte von verschiedenen Factorpotenzen sind. Nur ist hier die Exponenten als bekannt zu denken.

Damit ein solcher Bruch unendlich werde, muss sich entweder ein Factor im Zähler an  $\infty$ , oder einer im Nenner an 0 nähern. Hier sind zwei Fälle denkbar: Entweder wird jeder singuläre Fall im Nenner gleichzeitig mit einem ähnlichen im Zähler sein und die Wirkung desselben aufheben und umgekehrt; *dann ist also jedes einzelne Glied im Summe constant.* Oder es wird *wenigstens für eine Bedingung in der That Unendlichkeit im Gliede eintreten*, was nothwendig der Fall sein muss, damit die Glieder variabel seien.

14. Letzeres vorausgesetzt, denken wir uns das variable System, auf welches die vorgelegte Function anzuwenden ist,  $\infty^n$  Individuen enthaltend. Die Bedingung, dass die Function unendlich wird, muss als *einzelne Bedingung* entweder von allen identisch oder nur von  $\infty^{n-1}$  Individuen befriedigt werden, doch so, dass es im letzteren Falle, unter den  $\infty^{n-1}$ , noch  $\infty^{n-2}$  geben, die in Folge eintretender *Unbestimmtheit* auch andere Werthe befriedigen.

*Wenn also unter den  $\infty^{n-1}$ , welche die genannte Bedingung, dass ein Glied unendlich wird, erfüllen, Individuen nachzuweisen sind, welche die ganze Function weder unendlich noch unbestimmt machen, so ist man sicher, dass die genannte Bedingung nicht die Function unendlich macht.*

Auf diese Weise ist jede einzelne Bedingung, welche ein Glied unendlich macht, zu untersuchen. Vermag es ihrer keine, ist die Function constant.

Wenn dagegen gewisse von den Bedingungen die Function unendlich machen, giebt die Art derselben Winke, die bei der Untersuchung, auf welche Weise sonst dieselbe Function zusammengesetzt zu denken ist, näher auszubeuten sind.

So wird die Summe der Krümmungsradien in den Berührungspunkten der von einem Punkte an einer ebenen Kurve gezogenen Tangenten der Ebene unendlich, wenn der Punkt auf einer Asymptote liegt; woraus erhellt, dass im Ausdrucke für die genannte Summe die Abstände des Punktes von den Asymptoten ein Nennerproduct bilden müssen.

15. Statt den Nachweis zu führen dafür, dass es unter den  $\infty^{n-1}$  Individuen solche giebt, welche die Function bestimmt und endlich machen, kann man auch in grösserer Analogie mit der Methode der Exponenten nachweisen, was insofern stattfinden muss, dass gleichzeitig als ein Glied  $+\infty$ , wenigstens ein anderer  $-\infty$  wird, und zwar der Art, dass die Summe der unendlichen Glieder eine endliche Grenze bekommt.

Dieses häufig nicht ganz leichte Verfahren zeigt sich im Allgemeinen nothwendig, wenn der Unendlichkeitsgrad  $n=1$  ist, weil dann die obige Formel  $\infty^{n-1}$  eine endliche Anzahl Individuen giebt, unter welchen im Allgemeinen kein einzelnes, was Leichtigkeit betrifft, ausgezeichnet ist.

16. Eine Anwendung der hier entwickelten Addendenmethode ist in dem unter Titel: »Ein Beitrag zur methodischen Behandlung der metrischen Eigenschaften algebr. Kurven« soeben im »Archive« von mir veröffentlichten Arbeit (Bd. VII. P. 109) durchgeführt und mit ein Paar Bemerkungen über Schwerpunktssätze, die eine analoge Behandlung gestatten, begleitet.

Bevor ich zur Anwendung der in diesem Kapitel entwickelten Methoden übergehe, wird es für das Verständniss eines nicht geringen Theils von Details nothwendig sein eine Aussicht über die moderne Auffassung der metrischen Geometrie zu geben. Dies wird deshalb den Inhalt des folgenden Kapitels bilden. Es werden da auch verschiedene neue Beobachtungen vorgelegt.

## Kap. II.

### Die Grundelemente der metrischen Geometrie.

#### I. Die Grundelemente der Ebene.

17. Die ebene Figuren werden als von festen oder beweglichen, reellen oder imaginären *Geraden* und *Punkten* gebildet gedacht, welche Elemente als Grundgebilde der ganzen Geometrie der Ebene anzusehen sind. Die Kurven werden wie gewöhnlich als in zweifacher Weise durch die Bewegung entweder eines Punktes oder einer Geraden beschrieben zu denken. Die einfachste Figur besteht dann entweder von *zwei Punkten*,  $P_1P_2$ , einem Punkte  $P$  und einer Geraden  $g$ , oder von zwei Geraden  $g_1g_2$ . Die elementaren Grössen in der Ebene sind deshalb:

- 1) Die Strecke  $P_1P_2$  zwischen zwei Punkten.
- 2) Der Abstand  $Pg$  zwischen Punkte und Geraden.
- 3) Der Sinus  $\sin g_1g_2$  des Winkels zweier Geraden.

Sogleich ist zu bemerken, dass während der Winkel sowohl *periodisch* als *mehrdeutig*, der Sinus (wie die Strecke) nur *zweideutig* ist, indem die zwei Supplementwinkel denselben Sinus haben: der numerische Werth desselben ist daher bestimmt, wogegen das Vorzeichen nur durch hinzugefügte Umlaufsrichtung festgestellt wird.

Es ist für unseren Zweck von besonderer Wichtigkeit die Lage solcher Elemente zu studiren, für welche die genannten Grundgrössen verschwinden oder unendlich werden. Dies geschieht am leichtesten, indem man einen gewöhnlichen Dreieck (Dreiseit)  $ABC \equiv abc$  betrachtet, und die gewöhnliche Trigonometrie anwendet, deren Formeln noch gelten, wenn Seiten oder Ecke imaginär werden. Indem wir später mehrere Schlüsse aus diesen Formeln ziehen werden, beschränken wir uns hier auf:



$$a \sin B = b \sin A = h_c.$$

Die Consequenzen dieser Formeln sind:

- I. 1) Die Strecke  $P_1P_2$  ist 0 nur dann, wenn entweder die Punkte identisch, oder die Gerade focal ist, d. h. wenn  $P_1$  fest liegt, der geometrische Ort des  $P_2$  sind die beiden Geraden  $P_1I$  und  $P_1J$ , welche zusammen den Nullkreis um  $P_1$  bilden.
- 2) Die Strecke  $P_1P_2$  ist  $\infty$  nur dann, wenn wenigstens einer der beiden Punkte unendl. fern liegt.
- II. 1) Der Abstand  $Pg$  ist 0 nur dann, wenn die Gerade und der Punkt vereinigt liegen.
- 2) Ist  $\infty$ , wenn entweder die Gerade focal oder der Punkt unendlich fern ist.
- III. 1) Sin  $g_1g_2$  ist 0 nur dann, wenn entweder die Geraden identisch oder der Schnittpunkt unendlich fern ist.
- 2) Ist  $\infty$  nur dann, wenn wenigstens einer der Geraden focal ist.

19. Die hier nachgewiesenen *singulären Fälle* enthalten ersichtlich einen durchführbaren *metrischen Dualismus*. Aus den Bedingungen in II. 2 geht nämlich hervor, das die focalen Geraden eine unendlich grosse Entfernung haben von jedem endlichen Punkte, der nicht auf der Geraden selbst liegt, in welchem Falle, wie es gleich gezeigt werden soll, der Abstand unbestimmt wird. Wenn man daher den Namen die »unendlich entfernten imaginären Geraden« (verkürzte Bezeichn:  $\infty i$  oder  $\infty j$ ), einführt und die sonst »die unendlich entfernte« genannte dagegen als »die unendl. entfernte reelle Gerade« (verk.  $\infty r$ ) bezeichnet, wodurch sie als specielle Vereinigung von  $\infty i$  und  $\infty j$  zu denken ist, bekommt man folgendes dualistisch geordnete Schema der Sätze im vor. Art. ( $g_1g_2$  bedeutet auch der Schnittpunkt, ebenso  $P_1P_2$  die Verbindungsgerade;  $\infty P$  ist ein Punkt der  $\infty r$ ).



	$P_1P_2$	$Pg$	$\sin g_1g_2$
0	$P_1'P_2$ ist ein $\infty i$ oder $\infty j$ .	Vereinigte Lage.	$g_1g_2$ ist ein $\infty P$ .
$\infty$	$P_1$ oder $P_2$ ist ein $\infty P$ .	a) $P$ ist ein $\infty P$ , oder: b) $g$ ist ein $\infty i$ oder $\infty j$ .	$g_1$ oder $g_2$ ist ein $\infty i$ oder $\infty j$ .

*Anm.* Dass  $P_1P_2$  oder  $\sin g_1g_2$  im Falle einer Identität verschwinden, ist *keine einfache* sondern eine *zweifache Bedingung*.

Die hier nachgewiesene Analogie zeigt, dass ein Dualismus zwischen den metrischen Eigenschaften einer Punktfigur und den analogen einer Geradenfigur stattfinden muss; da aber einerseits die  $\infty i$  und  $\infty j$  anderseits die  $\infty P$ , welche die singulären Fälle vermitteln, in anzahlgeometrischer Hinsicht verschiedenartigen Systemen angehören, indem die  $\infty i$  u.  $\infty j$  eine degenerirte Kurve 2. Cl. die  $\infty P$  aber die Gerade  $\infty r$  als Träger besitzen, ist es nicht zu erwarten, dass dieser Dualismus solche anzahlgeometrische oder descriptive Analogien wie der *Poncelet-Gergonne'sche* aufweisen kann. *Dagegen wird er gewisse analoge Formelsysteme für entsprechende Figuren mitführen.*

20. Das in der vor. Art. enthaltene Schema muss mit einer Uebersicht über die eintretenden Fälle von *Unbestimmtheit* vervollständigt werden.

Unbestimmtheit tritt im Allgemeinen für solche Individuen ein, welche sowohl die Bedingung der Unendlichkeit als diejenige des Verschwindens befriedigen.

Oder: Aus den  $\infty^n$  Individuen, welche die Bedingung

der Unendlichkeit befriedigen, giebt es im Allgemeinen  $\infty^{n-1}$ , welche daneben diejenige des Verschwindens erfüllen.

*Die Strecke  $P_1P_2$  ist somit unbestimmt:*

Wenn  $P_1P_2$  eine  $\infty i$  od.  $\infty j$  und gleichzeitig  $P_1$  oder  $P_2$  ein  $\infty P$  ist, d. h.:

- 1) Wenn  $P_1$  od.  $P_2$  in  $I$  oder  $J$  fällt.

Beisp. Jeder Kreis um ein endliches  $P_1$  als Centrum passirt durch  $I$  und  $J$ . Also sind  $P_1I$  und  $P_1J$  unbestimmt.

- 2) Wenn sowohl  $P_1$  als  $P_2 \infty P$  sind, indem auch dann  $P_1P_2$  focal (sowohl  $\infty i$  als  $\infty j$ ) ist.

Beisp.  $P_1$  bewegt sich auf  $g_1$ ,  $P_2$  auf  $g_2$  derartig, dass  $P_1P_2$  konstant bleibt. (Gilt noch, wenn  $P_1$  und  $P_2$  auf der  $\infty r$  identisch werden).

*Der Abstand  $Pg$  ist unbestimmt:*

Wenn  $P$  und  $g$  vereinigt liegen und gleichzeitig:

- 1)  $g$  ist ein  $\infty i$  oder  $\infty j$ .

Beisp. Alle Geraden in gegebener Entfernung von gegebenem Punkte hüllen einen Kreis ein. Durch Aenderung der Entfernung bekommt man alle concentrische Kreise. Diese haben Asymptoten gemein, welche durch den Punkt gehen.

- 2)  $P$  ist ein  $\infty P$ .

Beisp. Ein solcher Punkt liegt auf allen Parallelen mit gegebener Richtung.

*Sin  $g_1g_2$  ist unbestimmt:*

Wenn der Punkt  $g_1g_2$  ein  $\infty P$  und gleichzeitig  $g_1$  oder  $g_2$  eine  $\infty i$  oder  $\infty j$  ist d. h.:

- 1) Wenn  $g_1$  oder  $g_2$  die  $\infty r$  ist.

Stimmt damit, dass die  $\infty r$  unbestimmter Richtung ist.

- 2) Wenn sowohl  $g_1$  als  $g_2$  entweder beide  $\infty i$  oder beide  $\infty j$  sind.

Zwei Geraden durch denselben Kreispunkt bilden einen

unbestimmten Winkel (gilt noch, wenn die Geraden identisch sind).

Durch gewöhnliche *Grenzenbetrachtung* ist in jedem einzelnen dieser Fällen der wahre bestimmte Werth nach den Regeln der Form  $\frac{a}{b}$  zu ermitteln.

## II. Das Focaldreieck.

21. Von den genannten Grenzwerten sind einige der auffallendsten und, wie ich glaube, am wenigsten beachteten, diejenige, welche  $\sin ABC$ ,  $\frac{AB}{CB}$  und der Abstand von  $B$  nach  $AC$  veranlassen, wenn  $AB$  und  $C$  drei Punkte derselben Focalgeraden sind.

Wenn nämlich  $ABC$  sich auf einer  $\infty i$  befinden und man durch  $B$  eine  $\infty j$  legt, bilden  $BI$  und  $BJ$  einen Nullkreis. Es sei  $B'$  der laufende Punkt der  $BJ$ ; dann bleibt  $\angle AB'C$  nach der Regel von den Peripheriewinkeln über denselben Bogen constant. Indem man nach der Grenze geht, bekommt man somit für unsere unbestimmte Form  $\sin ABC$  diesen constanten Werth:

*Theor.* Wenn  $ABC$  drei Punkte derselben Focalgeraden sind, haben

$$\sin ABC, \sin BCA, \sin CAB$$

bestimmte nur auf der gegenseitigen Lage der Punkte beruhende Werthe.

Wir sagen: Sie bilden das Focaldreieck  $ABC$ .

Weil

$$\angle ABC = \angle AB'C$$

wird weiter geschlossen, dass  $\sin ABC = 0$  ist, wenn  $A$  und  $C$  identisch sind, dagegen  $= \infty$ , wenn  $A$  od.  $C$  im Kreispunkte fällt. Im ersten Falle ist nämlich  $\sin ACB$  Null im Letzteren  $\infty$ .

22. Man sieht ebenso leicht, dass in einem Focaldreiecke die Verhältnisse der Seiten bestimmt sind.

Wenn man nämlich erinnert, dass der geometrische Ort des Punktes  $B'$ , wenn  $\frac{AB'}{CB'}$  constant bleibt, ein Kreis mit dem Centrum auf der Geraden  $AC$  ist, erhält man durch Grenzübergang, indem  $AC$  focal wird und das Centrum auf der focalen  $AC$  z. B. in  $B$  zu suchen ist:

$$\frac{AB'}{CB'} = \frac{AB}{CB},$$

und umgekehrt. Jedem Punkte  $B$  gehört ein neues Verhältniss  $\frac{AB}{CB}$ , das längs der ganzen  $BB'$  constant bleibt.

Wenn  $A$  und  $B$  identisch werden oder  $C$  im Kreispunkte fällt wird das Verh. gleich Null, gleich  $\infty$  dagegen, wenn  $B$  und  $C$  identisch oder  $A$  der Kreispunkt ist.

Es ist bemerkenswerth, dass man hiernach vom Mittelpunkte des Punktpaares  $A$  und  $C$  u. s. w. reden kann

Endlich sieht man, dass der Abstand  $B$ 's von der Seite  $AC$  völlig bestimmt und gleich Null ist. Dies erhellt aus der Formel

$$h_b = AB \sin BAC = CB \sin BCA,$$

wo  $AB$  und  $CB$  gleich 0, die Sin. dagegen endlich sind. Damit stimmt auch z. B. die Formel:

$$\frac{b}{h_b} = \cotg A + \cotg C,$$

wo das rechte Glied endlich, dagegen im linken der Zähler und folglich auch der Nenner gleich Null ist.

23. Eine wichtige Beobachtung, welche in genauer Verbindung mit den Betrachtungen der beiden vor. Art. steht, ist die folgende:

Der geometrische Ort derjenigen Punkte  $B'$ , für welche der Sehwinkel  $AB'C$  nach zwei festen Punkten  $A$  und  $C$

derselben Nullgerade z.B.  $\infty i$  constant ist, ist eine Nullgerade der zweiten Art  $\infty j$ . Je nachdem der Winkel  $ABC$  (oder  $\sin ABC$ ) variirt, bekommt man nach und nach alle  $\infty j$ . Diese können als ein System *paralleler Streifen in der Ebene* angesehen werden: Jedem Streifen entspricht ein constanter Werth der  $\angle AB'C$  längs der ganzen Ausdehnung des Streifens. Jeder Streifen  $\infty j$  bildet mit  $AC$  einen Nullkreis, während aber die Punkte des nach  $J$  gehenden Streifens den constanten Winkel bewahrt, weist  $AC$  nur im Schnittpunkte  $B$  den Werth des Winkels auf. Jedem andern Punkte gehört auch ein anderer  $\infty j$ -Streifen und liefert somit einen anderen Winkelwerth.

Daneben ist nach der vor. Art. zu bemerken, dass dieselben Streifen zugleich das Verhältniss  $\frac{AB'}{CB'}$  längs dem ganzen Streifen constant bewahren und nur von Streifen zu Streifen variiren.

Wenn  $AC$  keine Nullgerade gewesen war, wurden bekanntlich von den beiden Bedingungen die erstere ein Kreissystem durch  $A$  und  $C$  bestimmen, die letztere das orthogonale System, durch die beiden, um den Ausdruck *Darboux's* zu benutzen, mit  $A$  und  $C$  associirten Punkte  $A'$  und  $C'$ , als die endlichen Schnittpunkte der Nullkreise  $A$  und  $C$  bestimmt.

Wenn nun  $AC$  focal ist, fallen die Punktpaare  $AC$  und  $A'C'$  zusammen, eine descriptive Eigenschaft, welche eine Figur sogleich darthut. Die beiden Systeme werden identisch, was auch damit stimmt, dass zwei orthogonale Nullkreise immer die eine Nullgerade gemeinschaftlich haben müssen.

24. Die Betrachtungen sind hier auf der Eigenschaft des *Nullkreises*, als Grenze eines gew. Kreises gestützt. Die Betrachtung der *Nullgeraden* als Geraden leitet zu demselben Resultate. Der einfachste Weg und zugleich das Supplement unserer früheren Anwendungen aus der ebenen Trigonometrie bietet uns der elementare Cosinussatz.



Setzt man also im Dreiecke  $ABC$   $AC \equiv b = 0$ , bekommt man

$$0 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$\alpha: \frac{c}{a} = \cos B \pm \sqrt{\cos^2 B - 1} = \cos B \pm i \sin B = e^{\pm iB} \dots (\alpha)$$

Diese wichtige Formel, von Darboux analytisch abgeleitet, giebt sogleich die in vor. Art. gezeigten Thatzachen. Sie giebt auch zu der ebenfalls von Darboux nachgewiesenen Formel:

$$\frac{PA}{PB} = e^{iA'PB'} \dots (\beta)$$

Anlass, wo  $P$  ein beliebiger Punkt der Ebene,  $AB$  und  $A'B'$  associirte Punktpaare, welche überdies in der Formel getauscht werden können.

*Darboux* hat (*Sur une classe remarquable etc.*) wichtige Consequenzen dieser fundamentalen Formel für Kurven beliebiger ebenen Ordnungen gezogen. Für uns hat es grössere Interesse die von *Salmon*, später aber unabhängig von *Laguerre* nachgewiesene Verbindung zwischen Winkel und Doppelverhältniss, aus der Formel  $(\alpha)$ , wie es am einfachsten geschieht, abzuleiten.

Das doppelte Zeichen hat Bezug auf die beiden Arten von Nullgeraden, von welchen  $BA$  und  $BC$  geschnitten werden können, und deren  $AC$  der einen gehört. Separirt man diese, indem man durch  $A$  eine Gerade jeder Art legt, bekommt man:

$$\frac{c}{a} = e^{iB}, \quad \frac{c}{a'} = e^{-iB},$$

und durch Division:

$$\frac{a'}{a} = e^{2iB}.$$

Nun ist aber  $\frac{a'}{a}$  eben der Werth  $D$  eines der sechs Dop-

pelverhältnisse, zu welchen die Nullgeraden und ein nach dem Punkte  $A$  verschobener Winkel  $B$  Anlass geben. D. h.:

$$< B = \frac{1}{2i} \lognat D.$$

25. Es ist namentlich, wenn es im Folgenden wiederholt gilt die Ordnungen derjenigen unendlich grossen oder kleinen Werthe zu finden, welche die Factoren eines vollständigen Systems annehmen können, dass die Untérsuchung von Dreiecken, wo eine oder mehrere Seiten focal oder ein oder mehrere Eckpunkte unendlich fern sind, von Bedeutung werden.

Eine Formelreihe hier aufzustellen wird wohl überflüssig sein. Das Verfahren ist einfach: in die gewöhnlichen trigonometrischen Formeln den Werthen  $\varepsilon^n$  ( $n$  nach Umständen pos., 0, oder neg.), welche gegeben sind, hineinzusetzen und nachher, welchen Ordnungsexponent jeder der übrigen Grössen annehme, zu untersuchen. Selbstverständlich ist es im Allgemeinen erlaubt für irgend welche drei von einander unabhängige Grössen ganz willkürliche Ordnungen einzuführen. Die singulären Dreiecke, die hierdurch entstehen, haben indessen keine Anwendung in der folgenden methodischen Behandlung, *weil es in der Natur dieser liegt nur einfache Bedingungen in Besicht zu nehmen.*

Als theoretische Grenzfälle können sie doch sporadisch genannt werden. — Eine andere Sache ist, dass ein und dasselbe System, nach *einer* Definition als einfache Bedingung liefern kann, was in Folge *einer anderen* zweifacher Bedingung unterworfen werden würde. So zum Beispiel ein Dreieck, je nachdem es als Linien- oder Punktfigur aufzufassen ist. Wenn das Dreieck als Linienfigur (Dreiseit) aufzufassen ist, ist eine einfache Bedingung des Verschwindens, dass alle drei Seiten durch denselben Punkt gehen. Das hierdurch entstandene Dreieit bat alle Seiten unendlich

kleine, was eine dreifache Bedingung des Verschwindens bildet, wenn das Dreieck als Punktfigur anzusehen ist.

### III. Die ersten metrischen Definitionen invarianter Grössen in der Ebene.

26. Die obenstehenden Betrachtungen über das Dreieck geben die ersten metrischen Definitionen invarianter Grössen ab, nemlich derjenigen Grössen,  $\Delta_2$  und  $\nabla_2$ , welche gleich Null gesetzt ausdrücken, dass drei gegebene Punkte,  $ABC$ , auf derselben Geraden, resp. drei gegebene Geraden,  $abc$ , durch denselben Punkt gehen. Sie entsprechen, was auch zu erwarten wäre, einander metrisch-dualistisch.

Was  $\Delta_2$  betrifft, ist es leicht zu sehen dass diese nichts anders sein kann als bis auf einen Zahlenfactor das Flächenraum des Dreiecke  $ABC$ . Sagen wir:

$$\Delta_2 = 2 ABC.$$

Dies drückt durch sein Verschwinden eben die verlangte Eigenschaft aus und verschwindet in keinem andern Falle.

Betrachtet man die elementaren Ausdrücke des doppelten Flächenraumes, welche nicht Strecken allein enthalten, nämlich:

$$\begin{array}{ccc} ab \sin C, & bc \sin A, & ca \sin B, \\ ah_a, & bh_b, & ch_c, \end{array}$$

und bildet die dualistisch entsprechende:

$$\begin{array}{ccc} \sin A \sin B.c, & \sin B \sin C.a, & \sin C \sin A.b, \\ \sin Ah_a, & \sin Bh_b, & \sin Ch_c, \end{array}$$

sind in der That alle diese gleich und drücken eine metrische Grösse aus, welche dann und nur dann verschwindet, wenn die drei Seiten durch denselben Punkt gehen, also die gesuchte  $\nabla_2$ .

Damit nämlich z. B.  $\sin A h_a$  durch einfache liniengeometrische Bedingung verschwinde, müsste entweder  $\sin A = 0$  o:  $A$  ein  $\infty P$  sein, — dann ist aber  $h_a = \infty$  und zwar mit der Wirkung, dass das Product endlich bleibt, weil nämlich gleichzeitig das identische  $\sin B \sin C \cdot a$  sämtliche Faktoren endlich hat, — oder aber  $h_a = 0$  o: alle drei Seiten gehen durch denselben Punkt.

21. Die metrische Grösse  $\nabla_2$  lässt sich leicht auf einfache und ganz symmetrische Formen bringen.

Eine solche, die häufig bequem ist, bekommt man, indem:

$$\nabla_2 = \sin A \cdot h_a = ah_a \frac{\sin A}{a} = \frac{T}{R};$$

d. h.:

$\nabla_2$  ist der Flächenraum dividirt durch den Radius des umgeschriebenen Kreises.

Andre Formeln sind:

$$\Delta = a \cdot \sin B \sin C = 2R \cdot \sin A \sin B \sin C;$$

dies lässt sich wieder, weil  $A + B + C = \pi$ , schreiben:

$$\begin{aligned} \nabla_2 &= \frac{R}{2} (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \\ &= \frac{1}{2} (a \cos A + b \cos B + c \cos C). \end{aligned}$$

Die letzte Formel ist einer interessanten geometrischen Interpretation fähig. Wird das Dreieck der Höhenfusspunkte  $A'B'C'$ , die Seiten desselben  $\alpha, \beta, \gamma$  genannt und bemerkt man, dass die Winkel desselben zu  $2A, 2B$  und  $2C$  supplementär und der Radius dessen umgeschriebenes Kreises (*Feuerbach's* Kreis) gleich  $\frac{R}{2}$  ist, bekommt man

$$\nabla_2 = \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma).$$

wo jedoch die Zeichen algebraisch aufzufassen sind, indem sie  $\cos A$ ,  $\cos B$ ,  $\cos C$  folgen:

*Unsere Invariante ist also die halbe algebraische Summe der Seiten des Fusspunktsdreiecks.*

Es ist zu bemerken, dass diese algebraische Summe *einen Minimumswerth für alle im Dreieck  $abc$  eingeschriebene Dreiecke ist.* Aus dieser Eigenschaft ist ihre Bedeutung als Linieninvariante ableitbar.

28. Wenn die Ecken eines Dreiecks ( $ABC \equiv abc$ ) sich bis zum Zusammenfallen nähern, wodurch die Seiten resp.  $= \varepsilon$  werden, bekommt man  $\Delta_2 = \varepsilon^2$ ,  $\nabla_2 = \varepsilon$ .

Wenn die Geraden sich bis zum Zusammenfallen nähern, wodurch die Sin. resp.  $= \varepsilon$  werden, bekommt man  $\nabla_2 = \varepsilon^2$ ,  $\Delta_2 = \varepsilon$ .

In den Anwendungen kommt man häufig zu diesen wichtigen metrischen Begriffen, an welche die Grundgrössen der Ebene sich genau anschliessen. Dort findet man auch Generalisationen, wo Punkte und Gerade von Kurven ersetzt sind. Speciel ist eine merwürdige Generalisation gewisser elementar-trigonometrischen Sätze hervorzuheben, indem statt des gewöhnlichen Dreiecks ein System von drei algebraischen Kurven auftritt.

#### IV. Die metrischen Grundelemente des Raumpunktes.

Ein Punkt im Raume entspricht als Träger aller durch ihn gehenden Ebenen und Geraden (Strahlen) — und von andern wird in dieser Abtheilung nicht die Rede, warum keine ausdrückliche Hinzufügung deswegen geschehen wird — dualistisch der Ebene mit ihren Geraden und Punkten. In metrischer Beziehung aber ist es ein grosser Unterschied; während der metrische Dualismus der Ebene *nicht descriptiv* ist, ist *dies dagegen vollkommen der Fall mit derjenigen des Raumpunktes.*

Bekanntlich ist diese Reciprocität von besonderem geschichtlichen Interesse, als der historisch zuerst entdeckte.



Doch ward die Betrachtung damals wie später durch den Zusatz einer Kugel mit dem festen Raumpunkte als Centrum zugedeckt, und man hatte z. B. statt einer *Triedrometri* eine *sphärische Trigonometri*. Der Dualismus in der Geometrie des Raumpunktes ist somit nichts anders als die bekannte *Reciprocität zwischen einem sphärischen Dreiecke und seinem Polardreiseit*.

30. Zunächst: *Welche sind die metrischen Grundgrößen und wann werden sie 0 oder  $\infty$ ?*

Man hat dreierlei:

- 1)  $\sin g_1 g_2$  zwischen zwei Strahlen.
- 2)  $\sin g \pi$  zw. Strahl und Ebenen.
- 3)  $\sin \pi_1 \pi_2$  zw. zwei Ebenen.

31. Die erste dieser Größen ist nach dem, was wir schon kennen,  $\infty$ , wenn wenigstens die eine Gerade focal ist. Es entsteht dann die Frage nach dem Orte der focalen Geraden. Diese bilden bekanntlich die Generatrices eines Kegels 2. O. (der Fokal-Kegel,  $\infty K_2$ ) und verbinden den festen Raumpunkt mit den Punkten des unendlich entfernten Kugels (Kreis  $\infty C_2$ ).

Eine willkürliche Ebene schneidet den Fokalkegel in zwei focalen Geraden ( $\infty i, \infty j$ ). Jeder Winkel  $g_1 g_2$  in dieser Ebene ist (nach 26) =

$$\frac{\text{lognat}(g_1, g_2, \infty i, \infty j)}{2 i}$$

Berührt nun die Ebene den Fokalkegel oder, was dasselbe ist, den  $\infty C_2$ , — sie wird dann *Focalebene* genannt — ist das Doppelverhältniss = 1, also der Logarithmus Null 0:

Wenn die Ebene  $g_1 g_2$  focal ist, ist  $< g_1 g_2$ , und folglich  $\sin g_1 g_2 = 0$ .

Hieraus sind alle übrige Singulärfälle der drei Grundgrößen ableitbar.

32. Kleine lateinische Buchstaben bezeichnen wie früher Geraden; Ebenen sollen mit griechischen bezeichnet werden. Sei  $(abc \equiv \alpha\beta\gamma)$  ein Trieder,  $\eta_\alpha$  der Winkel zwischen  $a$  und  $\alpha$ , u. s. w., dann ist:

$$\sin \alpha \sin b = \sin \beta \sin a = \sin \eta_\gamma$$

u. s. w.

Aus diesen Formeln, in Verbindung mit dem Vorigen, wird ganz wie in (18) geschlossen:

- I. 1)  $\sin g_1 g_2$  ist 0, dann und nur dann, wenn entweder die Strahlen identisch sind oder die Ebene focal ist.  
 2)  $\sin g_1 g_2$  ist  $\infty$ , d. u. n. d., wenn wenigstens die eine Gerade focal ist.
- II. 1)  $\sin g\pi$  ist 0, nur bei vereinigter Lage;  
 2) ist  $\infty$ , d. u. n. d., wenn das eine Element focal ist.
- III. 1)  $\sin \pi_1 \pi_2$  ist 0, d. u. n. d., wenn entweder die Ebenen identisch sind oder der Strahl  $\pi_1 \pi_2$  focal ist.  
 2)  $\sin \pi_1 \pi_2$  ist  $\infty$  d. u. n. d., wenn wenigstens die eine Ebene focal ist.

33. Der Dualismus ist ersichtlich, und weil die focalen Strahlen Generatricen, die focale Ebenen Tangentialebenen derselben Kegel, diesmal *descriptiv*. Wird ein focaler Strahl  $\infty g$ , eine focale Ebene — weil sie in der That einen unendlichen Abstand vor jeder endlicher Punkt in Raume besitzt —  $\infty \pi$  genannt, kann man folgendes Schema aufstellen:

	$\sin g_1 g_2$	$\sin g\pi$	$\sin \pi_1 \pi_2$
0	$g_1 g_2$ ist ein $\infty \pi$ .	Vereinigte Lage.	$\pi_1 \pi_2$ ist eine $\infty g$ .
$\infty$	$g_1$ od. $g_2$ ist eine $\infty g$ .	a) $g$ ist eine $\infty g$ , oder: b) $\pi$ ist ein $\infty \pi$ .	$\pi_1$ od. $\pi_2$ ist ein $\infty \pi$ .

Anm. Dass  $\sin g_1 g_2$  oder  $\sin \pi_1 \pi_2$  im Fall einer Identität verschwinden, ist *keine einfache sondern eine zweifache Bedingung*.

Die Schiefheit in (19), indem es einerseits zwei Wahlen  $(\infty i, \infty j)$  andererseits nur eine  $(\infty P)$  gab, ist hier nicht vorhanden.

34. *Unbestimmtheit* tritt in analogen Fällen wie in (20) ein. Doch muss auch hier der Dualismus vollkommen sein.

*$\sin g_1 g_2$  ist unbestimmt:*

Wenn  $g_1 g_2$  eine  $\infty \pi$  und gleichzeitig  $g_1$  oder  $g_2$  eine  $\infty g$  ist.

Beisp. Alle coaxiale Rotationskegel \*) berühren  $\infty K_2$  längs denselben zwei Generatricen,  $\infty g_1, \infty g_2$ , (also mit denselben zwei Tangentenebenen  $\infty \pi_1, \infty \pi_2$ ). Wenn die gemeinschaftliche Achse  $a$  ist, ist z. B.  $\sin(\infty g_1 a)$  unbestimmt als allen Kegeln angehörend.

*$\sin \pi g$  ist unbestimmt:*

Wenn sie vereinigt liegen und gleichzeitig:

1)  $g$  eine  $\infty g$  ist.

Beisp. In jedem der oben erwähnten Rotationskegel bildet eine beliebige Generatrice einen constanten Winkel mit der auf der Axe senkrechten Ebene  $\alpha$ , der nur von Kegel zu Kegel variirt.  $\sin(\infty g_1, \alpha)$  ist somit unbestimmt.

oder:

2)  $\pi$  eine  $\infty \pi$  ist.

Beisp. Der Winkel zwischen einer beliebigen Tangentenebene und der Achse in jedem unserer Kegel ist constant und variirt nur von Kegel zu Kegel;  $\sin(\infty \pi_1, \alpha)$  wird dann unbestimmt wie früher.

*$\sin \pi_1 \pi_2$  ist unbestimmt:*

Wenn die Gerade  $\pi_1 \pi_2$  eine  $\infty g$ , und gleichzeitig  $\pi_1$  oder  $\pi_2$  eine  $\infty \pi$  ist-

Beisp. Man bilde wie früher den Winkel zwischen der

---

\*) Immer dem Raumpunkt gehörend.

Tangentialebene unserer Kegel und der Ebene  $\alpha$ . Durch dasselbe Raisonement wie früher sieht man, dass  $\sin(\infty\pi, \alpha)$  unbestimmt wird. Der Dualismus tritt schlagend hervor.

35. So wie es in der ebenen Trigonometrie von Wichtigkeit ist den Cosinussatz für den Fall, dass eine Seite focal ist, zu studiren, ist es auch für die metrische Untersuchung des Trieders von specieller Bedeutung wie es *Darboux* gethan hat, sich die eine Seitenfläche oder, was er ausser Betracht gelassen zu haben scheint, eine Kante focal zu denken und dann den sphärischen Cosinussatz anzuwenden.

Im ersten Falle ist in die Formel:

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

$\cos \gamma = 1$  hineinzusetzen, weil nämlich für focale  $\gamma$   $\sin \gamma = 0$  ist. Man bekommt dann nach Einführung von  $tg \frac{\alpha}{2}$  und  $tg \frac{\beta}{2}$ , statt  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ , u. s. w.

$$tg^2 \frac{\alpha}{2} + tg^2 \frac{\beta}{2} - 2 tg \frac{\alpha}{2} tg \frac{\beta}{2} \cos c = 0,$$

woraus:

$$\frac{tg \frac{\alpha}{2}}{tg \frac{\beta}{2}} = e^{\pm ic}.$$

Aehnlicher Weise bekommt man, indem in der Formel:

$$\cos c = -\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

$c$  focal ist d. h., weil  $c$  hier und  $\gamma$  im vorigen Falle supplementär sind,  $\cos c = -1$ :

$$tg^2 \frac{a}{2} + tg^2 \frac{b}{2} + 2 tg \frac{a}{2} tg \frac{b}{2} \cos \gamma = 0$$

9:

$$\frac{tg \frac{a}{2}}{tg \frac{b}{2}} = e^{\pm i(\pi - \gamma)},$$

welche Formel sich auch direct aus der früheren durch Polarität schliessen lässt.

36. *Darboux* führt auf der Kugel das einem gegebenen Punktpaare *associirte* hinein. Sind nämlich *A* und *B* zwei Punkte der Kugelfläche, gehen durch jedem zwei focale Geraden, welche den Generatricen der Kugel angehören und einander in zwei anderen Punkten, *P* und *P'* der Kugel schneiden. *P* und *P'* bilden dann *das associirte Punktpaar*. Dies auf die Geometrie des Raumpunktes angewandt, bestimmen *A* und *B* zwei Strahlen *a* und *b*, und diese wieder mit den vier focalen Geraden *AP*, *AP'*, *BP*, *BP'*, vier Ebenen, welche offenbar die Kugel berühren, weil sie ihre Generatricen enthalten, und zwar im Unendlichen, weil sie durch Centrum gehen. Die vier Ebenen sind somit nichts anders als die vier durch *a* und *b* gehenden focalen Ebenen. Sie haben ausser den nach *P* und *P'* gehenden Strahlen *p* und *p'*, noch zwei weitere Geraden gemein. Um diese scheinbare Abweichung von der sphärischen Betrachtung *Darboux's* zu erklären reicht es hin daran zu erinnern, dass *a* und *b* die Kugel ausser in *A* und *B* noch in den diametral entgegengesetzten Punkten *A'* und *B'* schneiden. Das neu hinzugekommene associirte Strahlenpaar entspricht denjenigen Punkten der Kugel, die *A* und *B'* (oder *A'* und *B*) associirt sind. Wenn diese Strahlen *q* und *q'* heissen, sind die Ebenen,

$$(ab), (pp'), (qq'),$$

einander senkrecht. Es geht vom oben entwickelten weiter hervor, dass man durch bestimmt angenommene Fortschritts-



richtung auf  $a$  und  $b$ , entweder  $pp'$  oder  $qq'$  als das (nach *Darboux*) associirte Strahlenpaar hervorhebt.

*Darboux* zeigt weiter, dass für einen willkürlichen Punkt der Kugel:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{MA}{2}}{\operatorname{tg} \frac{MB}{2}} = e^{\pm i PMP'}.$$

Hier sind natürlicherweise die Punkte  $P$  und  $P'$  durch  $Q$  und  $Q'$  ersetzbar, wenn gleichzeitig von  $A$  und  $B$  der eine mit dem diametralen Punkte vertauscht wird.

Die letzte Formel führt zu einer Reihe von Phänomenen, die mit den analogen in der Ebene sehr ähnlich sind. Es wird indessen Bedeutung haben sie auch vom rein synthetischen Gesichtspunkte anzusehen.

37. Fragen wir daher nach dem Orte solcher Strahlen  $c$ , welche mit zwei festen  $a, b$ , einen konstanten Ebenenwinkel  $acb = \alpha\beta$  bilden, bekommen wir einen Kegel 4ter Ordn. mit  $a$  und  $b$  als Doppelstrahlen und den Focalkegel  $\propto K_2$  in den vier durch  $a$  und  $b$  gehenden Focalebenen berührend.

Dies wird leicht durch Vergleichung mit einem analogen ebenen Probleme ermittelt. Die Gleichung

$$\angle \alpha\beta = \text{constant}$$

sagt nämlich aus, dass das Doppelverh.  $(\alpha, \beta, \infty \pi_1, \infty \pi_2)$  constant bleibt, wo  $\infty \pi_1$  und  $\infty \pi_2$  die beiden Focalebenen durch  $c$  bedeuten. Wenn man nun den Raumpunkt mit einer Ebene,  $\infty K_2$  mit einem Kegelschnitte in derselben,  $a$  und  $b$  mit den Kreispunkten  $I$  und  $J$  vertauscht, hat man die ganz entsprechende ebene Aufgabe, den Ort der Spitze eines Winkels von gegebener Grösse zu suchen, wenn die Schenkel den Kegelschnitt berühren. (Man unterlasse nicht die interessante Verschiedenheit zu bemerken, indem in den beiden Problemen

das metrische und das descriptive Element Rollen vertauscht haben). Die ebene Kurve ist 4ter O., hat die Kreispunkte als Doppelpunkte und berührt den Kegelschnitt nach den focalen Tangenten desselben. Hieraus erhellt unsere Lösung des früheren Problems.

Wenn der Winkel 0 ist, ist auch das Doppelverh. 0, man bekommt dann einen degenerirten Kegel 4ter O. nämlich  $\infty K_2$  und die Ebene  $\gamma \equiv ab$ , zweimal genommen. Für einen Winkel  $= \infty$  entsteht eine andere Degeneration: die beiden focalen Ebenenpaaren durch  $a$  und  $b$ . Sämmtliche Werthe sonst geben Kegel, welche dem Büschel durch die gemeinsamen Generatricen der hier genannten Gebilde gehören, was zu derselben Lösung führt. Speciel ist der Werth  $-1$  für das Doppelverh. zu bemerken. Der Winkel ist dann recht und der Kegel 4ter O. geht in denjenigen 2ter O., zweimal genommen über, welcher die 6 gemeinsamen Generatricen enthält.

Sämmtliche diese Verhältnisse bilden eine Wiederholung der entsprechenden Phänomene in der Ebene.

38. Von specieller Wichtigkeit ist der ausgezeichnete Fall, dass  $ab$  selbst eine focale Ebene ist, — in der Ebene dem entsprechend, dass  $IJ$  den Kegelschnitt berührt, d. h. dass dieser eine Parabel ist, in welchem Falle bekanntlich *die Spitze der constanten Winkel einen Kegelschnitt beschreibt, welcher Brennpunkt und Directrice mit der Parabel gemeinsam,  $\alpha$ : doppelte Contact mit derselben, hat.*

Ein leichteres ebenes System doppel berührender Kegelschnitte bilden aber bekanntlich zwei concentrische Kreise. Die Betrachtung dieser vervollständigt wesentlich unseren Satz.  $I$  und  $J$  entsprechen hier die Schnittpunkte der Asymptoten mit einer festen Tangente des einen Kreises, der Bewegung des Winkelspitzes auf den Kegelschnitte diejenige eines Punktes auf dem anderen Kreise. Da aber eine geänderte Wahl der festen Tangente keineswegs die Figur verunstaltet,

sieht man, dass das *Doppelverh. durch willkürliche Wahl der Tangente auf dem einen und des Punktes auf dem anderen Kegelschnitte nicht beeinflusst wird.*

39. Interpretirt man die gewonnene Resultate für Raumpunkte, hat man: *Den Ort desjenigen Strahles  $c$ , für welchen  $\angle acb$  constant ist, bildet, wenn  $ab$  eine focale Ebene ist, einen Kegel 2ter O., welcher  $\propto K_2$  zweifach berührt,  $\alpha$ : einen Rotationskegel.* Die Achse ist als Schnittlinie der beiden nicht zusammenfallenden Focalebenen durch resp.  $a$  und  $b$  bestimmt. Nachdem der Winkel  $acb$  sich ändert, bekommt man sämtliche coaxiale Rotationskegel.

*Umgekehrt wird der Schnitt einer jeden focalen Ebene mit den focalen Tangentenebenen (Asymptotenebenen) eines willkürlichen Rotationskegels von einer jeden Generatrice desselben aus unter constantem Ebenenwinkel gesehen.*

Somit sieht man, dass der Winkel dem Kegel als solchen gehört und sich nur mit diesem ändert. In der That ist er eben *demjenigen gleich, welchen die Tangentialebene des Kegels mit der auf die Achse senkrechten Ebene bildet.* Um dies einzusehen lege man die bewegliche Focalebene in die eine Asymptotenebene des Kegels und nähere den beweglichen Strahl an den Focalstrahl der anderen. Der Gesichtswinkel wird dann mit demjenigen identisch, welchen letzere Ebene mit der Ebene beider Focalstrahlen bildet, welche Ebene die auf die Achse senkrechte ist.

40. Mit Hülfe des vorigen Satzes erhält man eine zur Theorie vom Focaldreiecke (Abth. II, oben) entsprechende von solchen Focaltriedern (»Dreikanten«), dessen Kanten in derselben Focalebene liegen. Wie wir später sehen werden, giebt es auch eine andere ebenso merkwürdige Art von Focaltriedern (»Dreiflächen«), dessen Ebenen alle durch denselben Focalstrahl gehen.

Seien wie früher  $a$  und  $b$  zwei Strahlen in derselben focalen Ebene. Sie bestimmen dann eine Reihe coaxialer Rotationskegel, für deren Generatricen  $c$  der Winkel  $acb$  nur vom Kegel zum Kegel variirt. Jeder solche Kegel schneidet aber die Ebene  $ab$  in zwei Generatricen  $c_1, c_2$ , welche die Bedingung erfüllen:

$$< a c_1 b = a c_2 b = acb.$$

Umgekehrt: Sind  $abc$  drei nicht focale Strahlen\*) derselben focalen Ebene, bilden sie die Kanten eines Focaltrieders, für welchen die Kantwinkel bestimmte endliche Werthe besitzen.

In Folge der Darboux'schen Formel in 35 sind daneben die Verhältnisse zwischen den Tang. der halben Seitenwinkel

endliche Grössen, weil zu B.  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  nur auf  $< acb$  beruht und  $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$

somit für sämtliche Generatricen desselben Rotationskegels constant ist.

41. Eine ganz analoge Reihe von Betrachtungen schliesst sich die vorige dualistisch an. Man kann in derselben Art den Ort,  $\gamma$ : den eingehüllten Kegel, solcher Ebenen  $\gamma$ , aus welchen zwei festen  $\alpha$  und  $\beta$  einen gegebenen Winkel abschneiden, suchen; man findet einen Kegel 4ter Cl., welcher  $\infty K_2$  längs den beiden Focallinien beider festen Ebenen berührt, wie auch die beiden Ebenen selbst Doppelebenen sind.

Wenn der Strahl  $\alpha\beta$  focal ist, degenerirt der Kegel in diesen Strahl zweimal genommen und einen Rotationskegel, welcher  $\infty K_2$  längs den beiden andern focalen Strahlen in  $\alpha$  und  $\beta$  berührt.

\*) Durch das Wort „Strahlen“ soll immer angedeutet werden, dass die betr. Geraden durch denselben Punkt gehen.

Man hat hier eine neue Eigenschaft eines Rotationskegels:

*Das focale Strahlenpaar des Kegels wird von einem jeden focalen Strahle auf eine beliebige Tangentenebene zu ein Strahlenpaar projecirt, dessen Winkel constant demjenigen zwischen Achse und Generatrice gleich ist.*

Letzteres wird wie früher gesehen, indem man zur Tangentenebene die eine der beiden Asymptotenebenen und zum focalen Strahle denjenigen der anderen wählt.

42. Fügt man zu  $\alpha$  und  $\beta$  eine der beiden durch den Strahl  $\alpha\beta$  gehenden Tangentenebenen als Ebene  $\gamma$  hinzu, bekommt man ein neues Focaltrieder,  $\alpha\beta\gamma$ , dessen drei Seitenwinkel von einem und dem selben Strahl gebildet wird, jedoch aber resp. von bestimmten und endlichen Werthen sind.

Vergl. hiermit die Eigenschaften des Focaldreiecks  $ABC$ , dessen Eckpunkte auf derselben focalen Geraden liegen (21–25).

Es mag hier bemerkt werden, dass ein jeder im Endlichen gelegener Punkt einer focalen Geraden als Spitze des eben betrachteten Trieders gedacht werden kann, wie anderseits die Ebene eines Focaldreiecks gleichgültig ist, wenn sie nur endlich d. h. keine Focalebene ist.

## V. Die ersten metrischen Invarianten des Raumpunktes.

43. Auch die beiden metrischen Invarianten, welche ausdrücken, dass drei Strahlen in derselben Ebene liegen resp. drei Ebenen einen Strahl gemeinschaftlich haben, entsprechen einander dualistisch in jeder Beziehung.

Wenn drei Geraden  $abc$  in einer Ebene liegen, ist der triedrische Winkel, durch die sphärische Dreiecke gemessen, gleich Null oder  $2\pi$ , je nachdem man die verschiedenen trie-



drischen Winkel d. h. die Fortschrittsrichtungen auf den Geraden wählt.

Hier begegnet man indessen eine Ausnahme, wenn zwei der Geraden z. B.  $a$  und  $b$  zusammenfallen, in welchem Falle derjenige triedrische Winkel unbestimmt wird, welcher zwischen dem Bogen  $abc$  und der Grenzstellung  $ab$  gemessen wird, wenn nämlich die Fortschrittsrichtungen auf den zusammenfallenden  $a$  und  $b$  *entgegengesetzt* gerechnet wird.

Die Folge dessen ist, dass weder  $\sin E$  noch  $\sin \frac{E}{2}$  gleich Null gesetzt, identisch die Relation ausdrücken kann, dass  $abc$  in einer Ebene liegen.

Es giebt indessen ein anderer Ausdruck, welcher eine vollkommene Analogie mit dem entsprechenden in der Ebene hat und in der That die gesuchte Grösse liefert, derjenige nämlich, welchen *v. Staudt* (Crelle, Bd. 24, p. 255) *Sinus der triedrischen Ecke* nannte und wir mit

$$\sin abc$$

bezeichnen werden, indem :

$$\sin \beta \sin \gamma \cdot \sin a = \sin \gamma \sin \alpha \cdot \sin b = \sin \alpha \sin \beta \cdot \sin c = \sin abc.$$

Dieser Ausdruck verschwindet nämlich *nicht*, wenn auch eine der Ebenen oder Kanten focal wird, und somit nur, wenn entweder zwei Ebenen oder zwei Kanten identisch sind.

Vergl. für die Ebene:

$$\triangle_2 = bc \sin A = ca \sin B = ab \sin C.$$

Zur näheren Vergleichung mit der Ebene mag weiter folgende Formel dienen, wo  $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$ :

$$\sin abc = 2 \sqrt{\sin \frac{\sigma}{2} \sin \left( \frac{\sigma}{2} - \alpha \right) \sin \left( \frac{\sigma}{2} - \beta \right) \sin \left( \frac{\sigma}{2} - \gamma \right)}.$$

Daneben ist zu bemerken die Relation zwischen  $\sin \frac{E}{2}$  und  $\sin abc$ :

$$\sin abc = 4 \sin \frac{E}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

welche die Betrachtungen über die Grösse  $E$ , welche am Anfange dieser Art. angestellt sind, vervollständigen.

44. Diejenige Grösse, deren Verschwinden die Ebenen  $\alpha\beta\gamma$  durch denselben Strahl hindurchlegt, ist nunmehr dem vorigen dualistisch entsprechend zu bilden. Sie kann in folgenden Formen geschrieben werden:

$$\sin b \sin c. \sin \alpha = \sin c \sin a. \sin \beta = \sin a \sin b. \sin \gamma$$

und soll bezeichnet werden:

$$\sin \alpha\beta\gamma.$$

Auch diese Grösse ist früher benutzt worden (s. näher hierüber, *Baltzer*, *Elem. d. Math.* II p. 322\*\*). Doch scheint die in unserem Systeme hervorgehobene Bedeutung bisher unbemerkt, wie auch Gebrauch und Bezeichnung sowohl für diese als für die vorige Grösse hier neu sind.

Auch  $\sin \alpha\beta\gamma$  hat grosse Analogie mit der entsprechenden ebenen Grösse. Man findet z. B., indem:

$$\sin \alpha\beta\gamma = 2 \sqrt{-\cos \frac{s}{2} \cos \left( \frac{s}{2} - a \right) \cos \left( \frac{s}{2} - b \right) \cos \left( \frac{s}{2} - c \right)}$$

und, wenn der Winkel zwischen Generatrice und Achse des umgeschriebenen Rotationskegel  $\rho$  ist,

$$\sin \rho = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \left( \frac{s}{2} - a \right)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\cos \left( \frac{s}{2} - b \right)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\cos \left( \frac{s}{2} - c \right)} = \frac{-2 \cos \frac{s}{2}}{\sin \alpha\beta\gamma}.$$

$$\text{Nun aber ist: } -\cos \frac{s}{2} = \sin \left( \frac{s}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{E}{2},$$

woraus:

$$\sin \alpha\beta\gamma = 2 \frac{\sin \frac{E}{2}}{\sin \rho}$$

Vergl. die Formel in der Ebene:

$$\nabla_2 = \frac{T}{R}$$

# VI. Die Geometrie einer focalen Ebene resp. eines unendlich fernen Punktes.

Mit der erhöhten Anzahl Dimensionen bietet der Raum folglich eine viel grössere Mannigfaltigkeit von Bildungen dar. Ein Theil von diesen ist schon in Bezug auf die Ebene und den Raumpunkt behandelt, nämlich die Grundelemente  $(Pg)$  und  $(\pi g)$  sammt den von 3 Elemente zusammengesetzten  $(P_1P_2P_3)$  und  $(\pi_1\pi_2\pi_3)$ , *insofern nicht die Ebene ersteren resp. der Punkt des letzteren Gebilde als unendlich fern zu charakterisiren sind.*

Weiter haben wir das Gebilde  $(g_1g_2)$  betrachtet, insofern beide Geraden derselben Ebene oder, was einerlei ist, demselben Punkte gehören, wie auch das Gebilde  $(g_1g_2g_3)$  für einen und denselben *nicht unendlich fernen Träger (Ebene oder Punkt)*. Es steht somit zurück die Geometrie einer unendlich fernen (focalen) Ebene oder eines unendl. fernen Punktes zu untersuchen und zugleich die neuen Grundelemente  $(P\pi)$  und  $(g_1g_2)$  zu betrachten und zwar letzteres für beliebige Geraden im Raume.

46. *Die Geometrie der focalen Ebene* unterscheidet sich von derjenigen der ordinären dadurch, dass eine Focalebene, wie schon gesagt, nur *eine* Art Focalgeraden, jede eigentlich aus zwei zusammengefallenen entstanden, besitzt, und dass in Folge dessen immer  $\sin g_1g_2 = 0$ , wenn weder  $g_1$  noch  $g_2$  focal ist. Hieraus folgt aber weiter, dass in einer Focalebene sowohl die Grösse  $(Pl)$  als  $\Delta_2$  und  $\nabla_2$  gleich Null sind. Sind sie nicht Null, müssen sie unbestimmt sein; wie doch die Betrachtung eines Focaltrieders der ersten Gattung zeigte, werden, selbst wenn die genannten Grössen verschwinden, gewisse Verhältnisse bestimmt.

Merkwürdig ist z. B. *das focalebene Dreieck*. Hier sind die Verhältnisse der Sin. endlich. Eine andere wichtige Eigenschaft desselben ist die folgende: *Obgleich keineswegs*

die drei Ecken auf einer Geraden liegen, ist nicht desto weniger die algebraische Summe der Seiten gleich Null, was damit stimmt, dass der Flächenraum des Dreiecks Null ist.

47. Um die Geometrie der Focalebenen näher zu beleuchten, denken wir uns diejenigen Beiden, welche durch eine gegebene Gerade  $g$  gelegt werden können. Sie bilden mit einander einen Rotationskegel, indem wir einen willkürlichen Punkt  $P$  der Geraden als Spitze wählen. Wird  $P$  unendlich fern genommen, hat man einen Rotationseylinder.

Es sei  $g'$  eine andere Gerade durch  $P$ ; wenn nun  $\sin gg'$  constant ist, bekommt man durch Aenderung dieser Constante nach und nach alle Rotationskegel mit  $g$  zur Achse und  $P$  zur Spitze. Ist die Constante Null, zerfällt der Kegel in unsere beiden Ebenen.

Es sei  $Q$  ein<sup>2</sup> anderer Punkt der Gerade  $g$ ,  $R$  ein willkürlicher Punkt im Raume. Die Bedingung,

$$\pm PR \pm QR \pm PQ = \text{eine Constante,}$$

liefert dann nach und nach wie oben sämmtliche Rotationsflächen 2ter O. mit  $P$  und  $Q$  als Brennpunkten der rotirenden Kurve. Die Constante gleich Null gesetzt, giebt wieder unsere Focalebenen.

U. s. w.

48. Die Kreise der Focalebene sind zweierlei: zerfallene und nicht-zerfallene. Die nicht-zerfallene sind *Parabeln*, weil sie die unendlich ferne Gerade in zwei zusammengefallenen Punkten schneiden. Der Radius eines solchen Kreises ist  $= \infty$ . Geht der Kreis nämlich durch die Punkte  $ABC$ , hat man

$$2R = \frac{AB}{\sin C}$$

wo  $AB$  endlich,  $\sin C$  dagegen gleich Null ist.

Der zerfallene Kreis besteht aus *zwei focalen, somit parallelen Geraden*. Sein Radius ist endlich und bestimmt. Weil ein solcher Kreis als einer Degeneration eine Parabel anzusehen ist, besitzt er unendlich viele Centra längs einer dritten focalen Geraden, welche zwar harmonisch zu der unendl. ferne Geraden in Bezug auf die beiden gegebenen liegt.

Es seien  $AA'$  zwei Punkte, einer auf jeder der beiden Geraden,  $C$  der Schnittpunkt von  $AA'$  mit der *Centergeraden*. Dann ist wegen der harmonischen Theilung:

$$AC = A'C$$

Liegt  $B$  auf derselben Focalgeraden als  $A$ , ist:

$$BC \pm CA = \pm AB = 0$$

o:

$$BC = \pm AC.$$

Der Satz vom zerfallenen Kreise, in Bezug auf eine seiner focalen Geraden ausgesprochen, lautet somit folgendermaassen:

*Jeder Punkt einer gegebenen Focalgeraden hat einen endlichen und bestimmten Abstand von jedem Punkte einer anderen festen Focalgeraden derselben Focalebene.*

Dieser Abstand ist somit *der Abstand der beiden Geraden* zu nennen.

Die beiden Arten von Kreisen werden gebildet: *die nicht-zerfallenen*, wenn die Focalebene mit einer Kugel geschnitten wird, deren Centrum ausserhalb der Ebene liegt; *die zerfallenen*, wenn das Centrum in der Ebene liegt. Letztere Art ist somit Grösstenkreise und die Radien derselben denjenigen der Kugel gleich, erstere dagegen andere Kreise.

49. Wichtige Consequenzen dieser Betrachtungen sind folgende: I. *Jede focalebene Kurve* oder allgemeiner: *jede auf einer von Focalebenen erzeugten developpablen Fläche gelegene*



*Kurve hat in allen Punkten, wo die Tangente nicht focal ist, unendlichgrossen Krümmungshalbmesser d. h. eine Krümmung gleich Null. II. Alle Kurven einer solchen Fläche, welche zwei festen Punkte derselben verbinden, haben dieselbe Länge. Folgt aus 47.*

50. *Ein unendlich ferner Punkt* ist Träger von allen Geraden, welche mit der durch den Punkt bestimmten Richtung parallel sind, darunter die durch den Punkt gehenden unendlich ferne mitgerechnet, wie von allen mit den genannten Geraden parallelen Ebenen, darunter die durch den Punkte gehenden focalen. Die letzten bilden zwei Reihen, indem es zwei Tangenten vom Punkte an den  $\infty C_2$  giebt.

Zwei der Geraden seien  $g_1 g_2$ , dann ist  $g_1 g_2 = 0$ , wenn nicht wenigstens die eine Gerade unendlich fern, in welchem Falle der Winkel unbestimmt ist. Das Verhältniss zweier solchen Sin., von welchen jeder absolut Null ist, ist im Allg. endlich.

Drei Ebenen, welche keine Gerade gemeinschaftlich haben, bilden ein *Paralleltrieder*,  $\alpha\beta\gamma = abc$ . Die Eigenschaften desselben, wie im Allgemeinen die Geometrie des unendlich fernen Punktes kann bekanntlich studirt werden, indem man das ganze System paralleler Geraden und Ebenen mit einer senkrechten Ebene schneidet, deren Geometrie dann dieselbe Rolle spielt, wie die sphärische Geometrie für einem endlichen Raumpunkte. Jede Trace der Elementen des gegebenen Systems bildet ein entsprechendes Element in der Ebene. Insbesondere ist zu bemerken, dass die unendlich fernen Geraden die unendlich fernen Punkte der Ebene, wie auch die beiden Focalebenen, die beiden Focalgeraden derselben geben. Es entstehen somit *Abstände* zwischen den parallelen Geraden proportional mit den verschwindenden Sin. derselben, Dreiecks- und Kreis-Querschnitte proportional mit entsprechenden verschwindenden metrischen Grössen in den Paralleltriedern u. s. w. Hierauf können wir uns in Bezug auf dieses System beschränken.

## VII. Die metrischen Grundelemente und einfachsten Invarianten des Raumes.—Momente.

51. Wie wir für Ebene und Raumpunkt Höhenformel zur Grunde lagen, gehen wir analoger Weise für das Tetraeder vor. Es sei dies:

$$ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta \equiv (abca_1b_1c_1),$$

wo:

$$ABC \equiv abc \text{ und } \alpha\beta\gamma \equiv a_1b_1c_1$$

Man hat dann:

$$h\delta = a_1 \sin(a_1b) \sin b = \&c.$$

$$= \frac{a_1}{\sin(bc)} \sin(a_1bc) = \&c.$$

$$= h'_a \sin a = \&c;$$

$h'_a$  sei die Höhe auf  $a$  im Dreiecke  $ab_1c_1$ . Hieraus geht ausser Verschiedenem schon gefundenen hervor:

- 1) Der Abstand  $P\pi = 0$ , nur für vereinigte Lage.
- 2) Dieselbe Abstand  $= \infty$ , wenn entweder  $P$  unendlich entfernt oder  $\pi$  focal ist.

Weiter findet man, wenn man für den Abstand zwischen  $a$  und  $a_1$  die Bezeichnung  $\overline{aa_1}$  einführt und die mit denselben parallele Ebenenstellung mit  $\alpha'$  bezeichnet,

$$\overline{aa_1} = c_1 \cdot \sin c_1 a_1 \cdot \sin \beta \alpha' = \&c.$$

$$= \frac{c_1 \sin(c_1 aa_1)}{\sin aa_1} = \&c.$$

$$= c_1 \frac{\sin \alpha \beta \sin c_1 a \cdot \sin c_1 a_1}{\sin aa_1} = \&c.$$

Hieraus folgt, dass:

- 1)  $aa' = 0$ , wenn die Geraden in einerlei Ebene liegen.
- 2)  $aa' = \infty$ , wenn die Ebene  $\alpha'$  focal ist.

52. Man bemerke, dass, was man die Abstand zweier parallelen Geraden nennt, *nicht* immer die Grenze des Abstandes zweier windschiefen Geraden bildet. Wenn z. B.

$a$  die Achse einer Rotationseylinderfläche und  $a_1$  eine bewegliche Tangente desselben ist, dann bleibt die Abstand  $aa_1$  constant. Für gewisse Lagen von  $a$  tritt im Laufe der Bewegung Parallelismus zwischen  $a$  und  $a_1$  ein; *nur aber, wenn  $a_1$  dabei mit einer Generatrice des Cylinders zusammenfällt, wird die constante  $aa_1$  mit dem sogenannten Abstände der Parallelen  $a$  und  $a_1$  identisch.* Wenn  $a_1$  z. B. ein festen Punkt ausser der Cylinderfläche besitzt und also eine der beiden Berührungsebenen durch denselben beschreibt, tritt die parallele Lage ein, ohne dass die Parallelen den constanten Abstand bekommen.

Man muss daher *Parallelenabstand* und *windschiefen Abstand* unterscheiden. Um den wahren windschiefen Abstand zweier Parallelen, welche an und für sich unbestimmt ist, zu finden muss man, wenn z. B. die eine fest ist, während die andere eine Fläche beschreibt, die Lage derjenigen Ebene durch die bewegliche kennen, welche zu ihrer nächsten Lage parallel ist. Der windschiefe Abstand ist dann die Grenze der Abstand der festen Gerade von dieser Ebene.

Doch nicht nur im Falle eines Parallismus tritt Unbestimmtheit ein für die Grösse  $\overline{aa_1}$ ; auch sonst, wenn infolge der vor. Art. die Geraden in einerlei Ebene liegen und gleichzeitig  $\sin aa_1 = 0$  ist, d. h. wenn die gemeinschaftliche Ebene focal ist.

Beisp. Derjenige Linienkomplex, dessen Geraden constanten windschiefen Abstand von einer gegebenen haben, wird von allen Tangenten einer Rotationseylinderfläche mit der gegebenen zur Achse gebildet. Die Fläche hat zwei focale Tangentenebenen, deren Geraden alle die Achse treffen. Diese sind aber für alle coaxiale Rotationseylinderflächen gemeinschaftlich, warum der betreffende windschiefe Abstand ein ganz unbestimmter ist.

Unbestimmtheit für  $\overline{aa_1}$  tritt somit ein, wenn die Geraden vereinigte Lage haben, und gleichzeitig *entweder* der gemein-

schaftliche Punkt *oder* die gemeinschaftliche Ebene unendlich fern ist.

53. Durch *das Moment zweier Geraden* sei verstanden das Produkt:

$$\overline{aa_1} \sin aa_1 = M(aa_1).$$

Das *Moment* verschwindet, wie die Abstand  $\overline{aa_1}$  nur, wenn die beiden Geraden in einerlei Ebene liegen, unterscheidet sich aber davon, indem Unbestimmtheit nicht eintritt, wenn die gemeinschaftliche Ebene focal oder der Schittpunkt unendlich fern, sondern wenn wenigstens eine der vereinigt gelegenen Geraden focal ist.

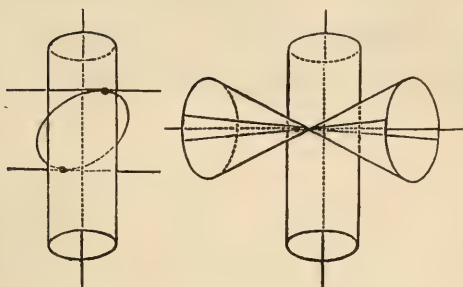
Denn  $\sin aa_1 = 0$ , wenn die Ebene  $\alpha', \infty$  dagegen, wenn eine der Geraden focal ist, und zwar (nach 51) in der Art, dass:

- 1)  $M(aa_1) = 0$ , wenn die Geraden in derselben Ebene liegen.
- 2)  $M(aa_1) = \infty$ , wenn eine der Geraden focal ist.

Hieraus erhellt die genannte Unbestimmtheit.

Beisp. Derjenige Liniencomplex, dessen Geraden ein gegebenes Moment,  $m$ , in Bezug auf eine gegebene Achse haben, ist 2ter Grad und von grosser Bedeutung. Seine fundamentalen Eigenschaften sind, dass alle Complexgeraden in derselben Ebene einen Kreis umhüllen und alle Geraden durch denselben Punkt einen Rotationskegel erzeugen. Denkt man sich die Achse vertical und einem Rotationscyliner mit dem Querschnitts-Radius  $m$  gehörend, sind die Complexkreise *alle diejenigen Kreise*, welche auf den Cylinder der Art aufgehängt gedeckt werden können, dass sie diesen umschliessend frei hängen und ihn somit nur mit dem höchsten und niedrigsten Punkte berühren.

Die Complexkegel bilden *alle Rotationskegel* mit horizontalen Achsen, welche in der Weise gegen den Cylinder gestützt werden können, dass die denselben mit zwei horizontalen Generatricen berühren.



Beides geht auf einmal aus der einfachen Formel hervor, welche man für  $M(aa_1)$ , bekommt, indem man z. B. durch  $a$  eine Ebene  $\pi$  legt, welche  $a_1$  in einem Punkte  $P$  schneidet, indem dann, wie man leicht verificirt:

$$M(aa_1) = (aP) \cdot \sin(a_1\pi).$$

Wenn hier  $a_1$  und  $\pi$  festgehalten werden, bleibt  $(aP)$  constant, d. h.  $a$  umhüllt einen Kreis mit dem Centrum  $P$ ; hält man  $a$  und  $P$  fest, bleibt der Winkel  $(a_1\pi)$  constant, d. h.  $a_1$  beschreibt einen Rotationskegel.

Die nachgewiesene Unbestimmtheit für Geraden derselben Ebene, deren eine focal ist, erhellt nun mit Hülfe dieses Complexes. Den Complexgeraden gehören nämlich die Asymptoten sämtlicher Complexkreise, und umgekehrt ist jede die Achse schneidende Gerade mitzunehmen. Weil nun die Achse gemeinschaftlich ist für alle Complexe, die durch Variation des  $m$  erhalten werden, sind alle die Achse treffenden focalen Geraden für alle Complexe gemeinsam, deren Momente in Bezug auf die Achse somit unbestimmt.

Sowohl  $aa_1$  als  $M(aa_1)$  nehmen dualistisch die absolute Mitte ein und entsprechen jede nur sich selbst.

Die Bedeutung des Momentes für die *Plückersche* Liniengeometrie ist übrigens erst von *Zeuthen* nachgewiesen. Er



hat es in die Analyse als rein geometrische Grösse eingeführt und daneben die Bedeutung ihres Verschwindens hervorgehoben (Forhandl. ved de skand. Naturf. 10de Møde 1868, p. 148, spec. p. 153).

54. Wir gehen jetzt dazu hinüber diejenigen Ausdrücke zu suchen, deren Verschwinden lehren, dass 4 Punkte in einerlei Ebene liegen, resp. dass 4 Ebenen durch denselben Punkt gehen. Den ersten, welcher natürlicherweise das Volum  $V$  des Tetraeders, mit einer willkürlichen Zahl am bequemsten 6 multiplicirt, ist, nennen wir  $\Delta_3$ , den andern  $\nabla_3$ .

Für  $\Delta_3$  giebt es bekanntlich eine Reihe von Ausdrücken, von welchen die einfachsten sind:

$$\Delta_3 = \Delta_2(\alpha). h_\alpha \quad , \quad \&c.$$

$$= a_1 b_1 c_1 \sin(\alpha_1 b_1 c_1) = \&c.$$

$$= \alpha \alpha_1 M(\alpha \alpha_1) \quad = \&c.$$

Bildet man die dualistisch entsprechende Ausdrücke:

$$\sin(\alpha\beta\gamma). h_\alpha \quad , \quad \&c.$$

$$\sin a. \sin b. \sin c. \nabla_2(\delta), \quad \&c.$$

$$\sin a_1. \sin \alpha. M(\alpha \alpha_1) \quad , \quad \&c.,$$

sind auch diese einander gleich, was leicht verificirbar ist, und drücken durch ihr Verschwinden, das die 4 Ebenen durch denselben Punkt gehen, aus, d. h. sie liefern verschiedene Formen für  $\nabla_3$ .

Es liegt übrigens in der Natur der Sache, dass auch andere Ausdrücke für  $\Delta_3$  durch metrisch-dualistische Umkehr analoge für  $\nabla_3$  geben. So sind zu nennen die bekannten Formeln (vergl. *Baltzer*, *Elemente*, II p. 350):

$$\Delta_3 = \Delta_2(\alpha) \cdot \Delta_2(\beta) \cdot \frac{\sin c'}{c'},$$

$$\Delta_3^2 = \Delta_2(\alpha) \cdot \Delta_2(\beta) \Delta_2(\gamma) \cdot \sin(\alpha\beta\gamma)$$

und umgekehrt:

$$\nabla_3 = \sin(\beta\gamma\delta) \cdot \sin(\gamma\delta\alpha) \frac{c}{\sin c},$$

$$\nabla_3^2 = \sin(\beta\gamma\delta) \cdot \sin(\gamma\delta\alpha) \cdot \sin(\delta\alpha\beta) \Delta_2(\delta).$$

55. Ein in metrischer Hinsicht wichtiges Tetraeder wird aus einem Systeme von 4 Punkten  $ABCD$  desselben focalen Kegels oder Null-Kugel\*) gebildet.

Die Fundamenteleigenschaft eines solchen singulären Tetraeders ist, dass die algebraische Summe der Producte entgegengesetzter Kanten constant = 0 ist. Mit andern Worten: Der für ebene Kreise geltende Ptolemaeische Lehrsatz kann dazu ausgedehnt werden, für jedes in eine Null-Kugel eingeschriebene Viereck zu gelten.

Beweis: Es seien  $O$  das Centrum der Null-Kugel,  $D'$  der Schnittpunkt der Generatrice  $OD$  mit der Ebene  $ABC$ . Dann ist  $ABCD'$  ein in einem Kreise eingeschriebenes Viereck, also:

$$AB \cdot CD' \pm BC \cdot AD' \pm CA \cdot BD' = 0.$$

Nun bilden in der Ebene  $ADO$   $AO$  und  $DO$  einen Nullkreis und somit hat man nach 26:

$$\frac{AD}{AD'} = \frac{OD}{OD'} = e^{\pm i DAD'}$$

und in Folge des analogen Raisonnements für die Ebenen  $BDO$  und  $CDO$  überhaupt:

---

\*) Was bisher ein Focalkegel genannt und  $\infty K$ , bezeichnet worden ist, zeigt sich bekanntlich mit einer Kugel mit dem Radius = 0 identisch.

$$\frac{AD}{AD'} = \frac{BD}{BD'} = \frac{CD}{CD'} = e^{\pm iDAD'} = e^{\pm iDBD'} = e^{\pm iDCD'},$$

woraus durch Hineinsetzen:

$$AB \cdot CD \pm BC \cdot AD \pm CA \cdot BD = 0,$$

oder:

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0,$$

wo das Vorzeichen algebraisch zu verstehen ist:  $a_1, b_1, c_1$  haben dieselben Zeichen wie resp.  $AD', BD', CD'$ .

56. *Drei willkürliche Geraden abc im Raume geben zu drei windschiefen Abständen, drei Winkelsinussen, drei Momenten Anlass. Daneben veranlassen sie einen Standl'schen Sinus &c., nämlich durch ihre Richtungen, ein Parallelepiped,  $P(abc)$ , welches entsteht, wenn man durch jede Gerade zwei mit den beiden andern parallele Ebenen legt, und endlich ein Hyperboloid  $H(abc)$ . Die den letzten Gebilden gehörenden Grössen sind an die ersten durch sehr interessante Relationen geknüpft.*

57. Zunächst findet man leicht die Formel:

$$P(abc) = \frac{M(ab) \cdot M(bc) \cdot M(ca)}{\sin^2(abc)}.$$

Werden nämlich die Kanten des Parallelepipeds resp.  $a'b'c'$  genannt, bekommt man:

$$P(abc) = a'b'c' \sin(abc).$$

Die mit  $a$  und  $b$  parallele Ebenenlage sei  $\gamma$  genannt, u. s. w., dann ist:

$$M(ab) = c' \sin(c\gamma) \sin(ab) = c' \sin(abc),$$

$$M(bc) = a' \sin(abc),$$

$$M(ca) = b' \sin(abc).$$

Hieraus unsere Formel, die zu weiteren Anlass giebt, deren die einfachste ist:

$$P(abc) = \frac{\overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca}}{\sin(\alpha\beta\gamma)}.$$

58. Wenn  $abc$  drei Generatricen derselben Art eines Hyperboloids sind, deren am einfachsten die zwei z. B.  $a$  und  $b$  fest, die dritte  $c$  variabel gedacht werden können, wird in der Formel:

$$P(abc) = \frac{M(ab) \cdot M(bc) \cdot M(ca)}{\sin^2(abc)},$$

im Zähler des rechten Gliedes  $M(ab)$ , im Nenner, welcher

$$\sin^2(ab) \cdot \sin^2(c\gamma)$$

geschrieben werden kann, der Factor  $\sin^2(ab)$  unter der genannten Voraussetzung constant bleiben. Betrachtet man nun den Bruch,

$$\frac{M(bc) \cdot M(ca)}{\sin^2(c\gamma)},$$

wird der Zähler nur dann verschwinden, wenn  $c$  mit  $a$  oder  $b$  zusammenfällt; man überzeugt sich aber durch Figurbetrachtung, dass dann gleichzeitig Zähler und Nenner =  $\varepsilon^2$  werden und somit der Bruch endlich bleibt. Der einzige Fall, in welchem der Nenner unendlich wird, tritt für focale  $c$  ein; gleichzeitig wird aber der Zähler unendlich derselben Ordnung. Hieraus folgt, dass für jede  $c$  das Parallelepiped  $P(abc)$  constantes Volum hat. Lässt man nach und nach  $a$  und  $b$  variiren, bekommt man den Satz:

*Für ein gegebenes Hyperboloid ist das Parallelepiped dreier willkürlichen Geraden derselben Art von constantem Volume. Die Constante ist selbstverständlich dieselbe, welche Art man auch wählt.*

Dass die Constante mit dem Producte der Achsen des

Hyperboloids in naher Beziehung steht, sieht man dadurch ein, dass sie nach dem Obigen nur dann verschwindet, wenn drei der Geraden einander schneiden, d. h. wenn das Hyperboloid degenerirt, und nur unendlich wird, wenn entweder eine der Geraden ins unendliche rückt oder  $\sin(abc)$  Null ist, welche Fälle beide aussagen, dass das Hyperboloid in ein hyperbolisches Paraboloid übergeht, dass also eine der Achsen unendlich wird.

Dies wird durch specielle Wahl bestätigt; legt man die beiden Generatricen derselben Art durch die Endpunkte der einen reellen Hauptachse und die eine Generatrice derselben Art durch den einen Endpunkt der anderen, bekommt man:

$$P(abc) = 4. \text{ das Product der drei Halbachsen,} \\ = 4.H(abc),$$

wodurch dieser merkwürdige Satz über drei willkürliche Generatricen derselben Art vervollständigt ist.

Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass der Satz für alle Flächen 3ter Ordnung gilt, indem man nur imaginäre statt reelle Elemente bekommt.

Es ist in diesem Kapitel ein kurzer Abriss der Elementar-begriffe der metrischen Geometrie gegeben, so wie sie im Consequenze mit der bisherigen Methode erstanden zu denken sind. Es lag im Plane, diesen Abriss innerhalb einer näheren Begrenzung zu halten; natürlicherweise könnten Betrachtungen und Erweiterungen immer ferner angeknüpft werden. Die folgende Abtheilung soll auf der hier entwickelten Grundlage eine Reihe von Anwendungen in verschiedenen geometrischen Bereichen darstellen.



### Kap. III.

#### Anwendung der neuen synthetischen Methode auf metrische Eigenschaften.

59. Wir werden zunächst einige metrische Sätze zeigen, welche sich an besondere Punkte einzelner Theorien in der modernen Geometrie knüpfen, namentlich an die Lehre von Pol und Polare bei Kegelschnitten und Flächen zweiter Ordnung, vom Desargue'schen Satze über Dreiecke, von Pascal's Sechsecken Poncelet'schen Polygonen u. Ae. Dann wird eine Reihe Anwendungen folgen, worin einfache gleichartige Beweise dafür, dass gewisse symmetrische Funktionen constant sind, geführt werden sollen. Endlich soll eine Begründung von wichtigen Definitionen in der allgemeinen Theorie der Kurven gegeben und den Nutzen derselben durch Beispiele dargethan werden. Namentlich wird hier die Lehre von Brennpunkten mit neuen Sätzen bereichert werden.

#### I. Metrische Sätze, besondere Punkte in der modernen Geometrie betreffend

60. *Reciproke Polar-Dreiecke und Dreiseiten an Kegelschnitten.* Mehrere interessante Beobachtungen können gemacht werden in Folge des einfachen Satzes, dass der Pol einer um einen festen Punkt beweglichen Polare auf die Polare desselben gleitet. Wählt man z. B. drei Punkte, wird der Flächenraum,  $t$ , des betreffenden Dreiecks gleichzeitig mit demjenigen des von ihren Polaren eingeschlossenen Dreiseits verschwinden, und umgekehrt. Wenn man auf dieser Grundlage ein zusammenhängendes System zu bilden sucht, sieht man, dass für  $T = \infty$  wenigstens eine der Seiten  $t$ 's durch das Centrum des Kegelschnitts geht, — somit

dass der Kegelschnitt ein solches besitzt vorausgesetzt. Wenn man daher als hinzuzufügende Funktion das Product der Flächenräume derjenigen Dreiecke,  $t_1, t_2, t_3$ , welche resp. eine Seite des  $t$  als Grundlinie und das Centrum als Spitze besitzen, wählt, findet man, dass schon hiedurch das System vervollständigt ist, indem:

$$1) \quad T = 0, \dots \dots \dots t = 0,$$

$$2) \quad T = \infty, \dots \dots t_1 t_2 t_3 = 0,$$

$$3) \quad t = \infty, \dots \dots t_1 t_2 t_3 = \infty$$

geben.

Hier ist 1) der Fall, dass für  $T$  die drei Seiten sich daran nähern durch denselben Punkt zu gehen; alle drei Winkel sind im Allgemeinen endlich. 2) und 3) sind die Fälle, dass für resp.  $T$  oder  $t$  ein Punkt ins Unendliche rückt. Der Fall, dass für  $T$  ein Winkel sich an Null nähert, indem die Endpunkte der entgegengesetzten Seiten zusammenfallen, tritt nur für doppelte Bedingung ein, und ist somit auszuschliessen. Er giebt indessen:

$$T = 0, \quad t = 0, \quad t_1 t_2 t_3 = 0.$$

Die ordinären Singulärfälle geben für das vollständige System,

$$T^\alpha \cdot t^\beta (t_1 t_2 t_3)^\gamma,$$

die Bedingungsgleichungen:

$$(1) \quad 2\alpha + \beta = 0, \text{ (Man setze } t = \varepsilon^1)$$

$$(2) \quad -\alpha + \gamma = 0,$$

$$(3) \quad \beta + 2\gamma = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : -2 : 1,$$

welche Werthe übrigens auch der aus dem zuletzt besprochenen Falle hervorgehenden Gleichung:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

befriedigen.

Man hat somit:

$$T = K \cdot \frac{t^2}{t_1 t_2 t_3}.$$

Um die Constante,  $K$ , zu finden, wählt man am einfachsten eine Ellipse, und zum Dreiecke  $t$  dasjenige, welches von zwei mit den Hauptachsen  $2a$  und  $2b$  parallelen Tangenten und der Contactchorde gebildet wird.

Man hat dann:

$$T \equiv t = t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{2}ab,$$

und die endliche Formel lautet

$$T = \frac{a^2 b^2}{4} \cdot \frac{t^2}{t_1 t_2 t_3}.$$

61. Die Form  $a^2 b^2$  deutet darauf, dass für Ellipse und Hyperbel  $T$  mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen sind, was auch eine Figur bestätigt, indem der Umlauf der Seiten entgegengesetzt ist.

Vorausgesetzt, dass man unter dem Flächenraume eines Hyperbels den Ausdruck  $\pi ab$  versteht, giebt unsere Formel folgende Sätze:

- I. *Alle concentrische Kegelschnitte, welche ein gegebenes Dreieck in ein anderes  $T$  von gegebenem Flächenraume überführt, haben denselben Flächenraum.*
- II. *Der Ort der Centra aller solcher gleich grossen Kegelschnitte ist eine Kurve 3ter O., welche die Seiten  $t$ 's als asymptotische Wendetangenten besitzt.*
- III. *Eine homographische Transformation, welche alle Flächenräume ungeändert lässt, ergiebt sich durch zwei succes-*

sive polare Transformationen in Bezug auf gleich grosse concentrische Kegelschnitte; wenn letztere nur concentrisch sind, werden alle Flächenräume mit einer gewissen Constante multiplicirt.

- IV. Wenn die beiden concentrischen Kegelschnitte eine Ellipse und eine Hyperbel sind, deren Flächenräume denselben Modul haben, ändern alle Flächenräume nur das Zeichen.

62. Wenn  $t$  ein Polardreieck des Kegelschnitts ist, fallen  $t$  und  $T$  zusammen, und man findet zufolge der Gleichung:  $t = t_1 + t_2 + t_3$ :

$$\frac{1}{t_1 t_2} + \frac{1}{t_2 t_3} + \frac{1}{t_3 t_1} = \frac{4}{a^2 b^2},$$

d. h. den Flächenraum des Kegelschnitts als Function des Centrum in einem trilinearen Coordinatensysteme zu einem Polardreiecke hingeführt, mit Lagrange-Möbius'schen Coordinaten.

63. Wenn die Ecken des  $t$  mit dem Centrum des Kegelschnitts ein Parallelogram bilden, ist nach einer hübschen Eigenschaft dasselbe mit denjenigen des  $T^*$ ) der Fall. Weil dann  $t_1 = t_2 = t_3 = t$ , bekommt man, wenn die Parallelogrammen  $P$  und  $p$  sind:

$$P.p = a^2 b^2.$$

\*) Ein Corollar folgenden für die polare Homographi wichtigen Theoremes: Wenn  $(A, a)$  in  $(a', A')$  übergeführt wird und die Centrallinie  $AO a$  in  $B, A'O a'$  in  $B'$  schneiden, hat man:

$$\frac{AO}{BO} = \frac{A'O}{B'O},$$

wie ein Raisonement über 0 und  $\infty$  sogleich giebt. Dass nun die Ecken des  $t$  mit  $O$  ein Parallelogram bilden, heisst, dass unter den drei Verhältnissen von der Form  $\frac{AO}{BO}$ , die zwei = 0, das dritte = 2 ist. Diese Verhältnisse, deren übrigens die zwei das dritte bestimmen, werden durch die Transformation ungeändert. Daher der Satz.

Corollar: Der Apollonische Satz von den Parallelogrammen conjugirter Durchmesser.

64. Seien  $s_1, s_2, s_3$  die Seiten des  $t$  und  $p_1, p_2, p_3$  deren Abstände vom Centrum,  $r$  der Radius des dem  $t$  umgeschriebenen Kreises; dann ist mit Zuhilfenahme von der Formel  $r = \frac{s_1 s_2 s_3}{4t}$ :

$$T = \frac{a^2 b^2}{4} \cdot \frac{8t^2}{s_1 s_2 s_3 \cdot p_1 p_2 p_3} = \frac{1}{2} a^2 b^2 \frac{t}{r p_1 p_2 p_3},$$

o:

$$\Delta_2(T) = a^2 b^2 \frac{\nabla_2(t)}{p_1 p_2 p_3},$$

eine Formel, welche in lauter reinen metrischen Invarianten den Satz von Pol und Polare ausspricht.

65. Sowohl die letztere Formel als die ursprüngliche in 60 giebt einen einfachen Ausdruck für die Verbindung zwischen den Krümmungsradien zweier reciproken Kurvenelemente. Wenn man beide Formel zusammenstellt, welche man bekommt, indem man  $t$  und  $T$  umtauscht, bekommt man nämlich für beide umgeschriebenen Kreise:

$$R \cdot P_1 P_2 P_3 = r \cdot p_1 p_2 p_3,$$

woraus für zwei Kurvenelemente:

$$R \cdot P^3 = r \cdot p^3,$$

wo  $R$  und  $r$  die Krümmungsradien,  $P$  und  $p$  die Abstände der Tangenten vom Centrum des Kegelschnittes sind. Dienste leistet häufig folgende Consequenz hieraus:

Wenn eine Tangente sich daran nähert focal zu sein, nähert sich der Krümmungsradius an 0 in der Weise, dass, für  $p = \varepsilon^{-1}$ ,  $r = \varepsilon^3$ .

Einige der hier entwickelten Sätze sind schon in der



in *Bul. de la Soc. Math. de France* veröffentlichten Arbeit besprochen. Die meisten mögen kaum neu sein.

66. Es seien  $ABCD$  vier Punkte der Ebene; dann ist

$$BCD + CAD + ABC + DAB \equiv 0,$$

oder durch Einführen der Grösse  $\Delta_2$ , mit leicht zu verstehendem Sinne:

$$\Delta_2(A) + \Delta_2(B) + \Delta_2(C) + \Delta_2(D) \equiv 0,$$

wo die Zeichen algebraisch zu nehmen sind.

Es seien nun  $abcd$  die Polaren und  $O$  das Centrum des Kegelschnittes; dann ist:

$$(Oa) \nabla_2(a) + (Ob) \nabla_2(b) + (Oc) \nabla_2(c) + (Od) \nabla_2(d) \equiv 0,$$

eine fundamentale Gleichung zwischen den Grössen  $\nabla_2$  derjenigen 4 Tripel, die aus 4 willkürlichen Geraden herausgenommen werden können; auch ist für  $O$  ein willkürlicher Punkt der Ebene zu nehmen, weil ein beliebiges System  $a, b, c, d, O$  immer  $\infty^3$  Systeme  $ABCD$  giebt.

Die hier angegebene Gleichung, welche ich früher durch Betrachtungen über trilineare Coordinatensysteme gefunden habe, sind mit einer Gleichung, welche von *Casorati* angegeben und in *Nouvelles Annales* (1878) eingenommen ist, verwandt. Weil indessen die Untersuchungen *Casorati's* aus andern Grundbetrachtungen als die meinigen hervorgehen, theile ich letzere in einer späteren Note (I) mit.

67. Wenn der Kegelschnitt ein Parabel ist, bekommt man Formeln, welche den frühern entsprechen, indem man Grenzausdrücke für diese sucht. Wenn man also statt  $a^2b^2$  das identische  $a''p$ , wo  $p$  der halbe Parameter ist, einführt, geht an der Grenze die Formel der Art. 63 in folgende über:

$$\Delta_2(T) = p \cdot \frac{\nabla_2(t)}{\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3},$$

wo  $\varphi_i$  die Winkel sind, welche die Seiten des  $t$  mit der Parabelachse bilden.

Der Satz III in 61 bekommt dadurch den Zusatz: *Eine homographische Transformation, welche die Flächenräume unändert lässt, wird auch durch zwei successive polare Transformationen in Bezug auf congruente und parallele Parabeln ermittelt. Sind die Parabeln nur parallel, werden alle Flächenräume mit einer Constante multiplicirt.*

Aehnlicher Weise geht die Formel der Art. 65 in folgende über:

$$R \sin^3 \Phi = r \sin^3 \varphi,$$

wo  $\Phi$  und  $\varphi$  die Winkel der Tangenten mit der Achse sind.

68. *Reciproke Polartetraeder in Bezug auf Flächen 2ter O.* Ganz analog mit den hier angestellten ist eine andere Reihe von Betrachtungen über reciproke Polartetraeder in Bezug auf Flächen zweiter Ordnung durchführbar. Es seien  $O$  das Centrum,  $a, b, c$  die Halbachsen einer solchen Fläche  $T$  und  $t$  die beiden reciproke Tetraeder,  $t_1 t_2 t_3 t_4$  diejenigen vier Tetraeder, welche in  $O$  eine Spitze und resp. die Flächen des  $t$  zu Basen haben. Man findet dann, indem das ganze Raisonnement schrittweise mit dem vorigen stimmt:

$$T = \frac{a_2 b_2 c_2}{36} \cdot \frac{t^3}{t_1 t_2 t_3 t_4}.$$

Die Zahl 36 ist  $(1.2.3)^2$ , so wie früher  $4 = (1.2)^2$ . Hier ahnt man die Regel für mehrere Dimensionen.

69. Durch die Volume eines ein- oder zwei-schaligen Hyperboloids resp.  $\pi abc i$  und  $-\pi abc$  verstanden, bekommt man ein Reihe von Sätzen, deren wir uns auf die folgenden beschränken:

- I. *Sämmtliche concentrische Flächen, welche einen gegebenen  $t$  in einen neuen  $T$  von gegebenem Volum überführen, sind gleich gross.*

- II. Eine homographische Transformation im Raume, welche alle Volume ungeändert lässt, wird durch zwei successive polare Transformationen in Bezug auf gleich grosse concentrische Flächen 2. O. Sind die Flächen nur concentrisch, werden alle Volume mit einer Constante multiplicirt.
- III. Wenn von den beiden concentr. Flächen die eine elliptisch, die andere hyperbolisch gekrümmt ist, während die beiden Vol. denselben Modul haben, wird nur das Zeichen sämmtlicher Volume geändert.

Ebenso ist zu bemerken die Formel:

$$\frac{1}{t_1 t_2 t_3} + \frac{1}{t_2 t_3 t_4} + \frac{1}{t_3 t_4 t_1} + \frac{1}{t_4 t_1 t_2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{36},$$

wo  $t_1 t_2 t_3 t_4$  die Coordinaten des Centrums, in homogenen Tetraëdervolum-Coordinaten zu einer Polartetraeder ( $T = t$ ) hingeführt, sind.

70. Wenn  $t$  mit  $O$  ein Parallelepiped bestimmt, d. h. wenn es ein Parallelepiped giebt, dessen eine Ecke in  $O$ , die entgegengesetzte und die drei sie umgebenden in den Ecken  $t$ 's fallen, dann bestimmt\*) auch  $T$  mit  $O$  ein Parallelepiped  $P$  und man hat

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t,$$

d. h.

$$P. p = a^2 b^2 c^2.$$

Specieller Fall: Das in Bezug auf Volum constante Parallelepiped drei conjugirter Durchmesser.

\*) Wird analog mit dem Satze in 63\*) bewiesen.

71. Endlich kann man von der ursprünglichen Formel in 68 zur folgenden, welche in Form und Bedeutung mit derjenigen im Art. 64 erhaltenen analog ist, übergehen:

$$\Delta_3(T) = a^2 b^2 c^2 \cdot \frac{\nabla_3(t)}{p_1 p_2 p_3 p_4}.$$

Die  $p_i$  sind die Abstände  $O\alpha$ ,  $O\beta$ ,  $O\gamma$ ,  $O\delta$  des Centrums von den Seitenflächen  $t$ 's, wenn man die in 53 benutzte Terminologie anwendet.

Zum Beweise führt man ein:

$$t_1 = \frac{1}{6} p_1 \Delta_2(\alpha)$$

$$t_2 = \frac{1}{6} p_2 \Delta_2(\beta)$$

$$t_3 = \frac{1}{6} p_3 \Delta_2(\gamma)$$

$$t_4 = \frac{1}{6} p_4 \Delta_2(\delta)$$

Nach 53 hat man:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{6} \Delta_3(t) = \frac{1}{6} \Delta_2(\alpha) \cdot \Delta_2(\beta) \frac{\sin c_1}{c_1} = \frac{1}{6} \Delta_2(\gamma) \Delta_2(\delta) \frac{\sin c}{c} \\ &= \frac{1}{6} cc_1 M(cc_1). \end{aligned}$$

Wenn man für  $t^3$  das Product der drei letzten Ausdrücke und  $\nabla_3(t)$  statt  $\sin c \sin c_1 M(cc_1)$ ,  $\frac{1}{6} \Delta_3(T)$  statt  $T$  hineinsetzt, bekommt man die angegebene Formel, deren Grössen alle rein metrische Invarianten sind.

72. Wenn  $ABCDE$  5 Punkte im Raume sind, ist in Folge der bekannten Zeichenregel für Tetraëder im Raume:

$$ABCD + CDEA + EABC + BCDE + CEAB = 0,$$

oder mit 6 multiplicirt:

$$\Delta_3(A) + \Delta_3(B) + \Delta_3(C) + \Delta_3(D) + \Delta_3(E) \equiv 0.$$

Analog mit dem in Art. 66 Entwickelten bekommt man daher die fundamentale Formel:

$$(O\alpha) \nabla_3(\alpha) + (O\beta) \nabla_3(\beta) + (O\gamma) \nabla_3(\gamma) + (O\delta) \nabla_3(\delta) + (O\varepsilon) \nabla_3(\varepsilon) \equiv 0,$$

zwischen den 5 aus 5 Ebenen herausgenommenen Ebenenquadrupeln in Verbindung mit einem beliebigen Punkte  $O$ . S. Note (I).

73. Endlich ist zu bemerken, dass ein Grenzübergang entsprechende Formel giebt, worin die Fläche 2ter  $O$ . ein *Paraboloid* ist. Wird in:

$$\Delta_3(T) = a^2 b^2 c^2 \cdot \frac{\nabla_3(t)}{p_1 p_2 p_3 p_4}$$

$c$  zur längsten Achse genommen,  $\frac{a^2}{c} = p'$ ,  $\frac{b^2}{c} = p''$  und

$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{p_i}{c} = \sin \varphi_i$  gesetzt, wo somit  $\varphi_i$  der Winkel zwischen der Achsenrichtung  $c$  und der bezüglichen Tetraederfläche ist, bekommt man an der Grenze:

$$\Delta_3(T) = p' p'' \cdot \frac{\nabla_3(t)}{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_4}.$$

Die Bedeutung des Products  $p' p''$  ist, dass die Querschnitte aller Paraboloiden mit demselben Producte  $p' p''$ , in gleich grossen Abständen vom Scheitel Segmente von demselben Volum abschneiden. Der Kürze wegen nennen wir solche Paraboloiden gleich gross, und können dann aussprechen:

*Eine homographische Transformation, welche die Volume ungeändert lässt, wird ausser in der in 69, II besprochenen Weisse auch durch zwei successive polare Transformationen in Bezug auf gleich grosse Paraboloiden mit parallelen Achsen erhalten.*

*Sind die Achsen nur parallel, werden alle Vol. mit einer Constante multiplicirt.*



74. Dass die angegebenen Transformationen Flächenräume resp. Volume proportional lassen, sieht man auch ein, indem sie die unendlich ferne Gerade resp. Ebene als Polare resp. Polarebene eines gemeinsamen Centrums, ungestört lassen. Hieraus folgt aber der constanten Dopperverhältnisse wegen, dass Strecken längs einer Geraden in proportionale Strecken längs einer anderen übergehen. Weil gleichzeitig in zweidimensionalen Transformationen Parallelogramme, in dreidimensionalen Parallelepipeden in ebensolche übergehen, werden in den ersteren Flächenräume, in den letzteren Volume in proportionale übergeführt.

Uebrigens ist es überflüssig hinzuzufügen, dass die gelieferte Beiträge zur Lehre von der Polarität bei Kurven oder Flächen 2ter O. mit Leichtigkeit einer weit grösseren Ausdehnung fähig sind, und dass das hier Mitgetheilte nur als eine Probe anzusehen ist.

75. *Formeln, welche als specielle Fälle die Sätze von Desargue'schen Dreiecken, Pascal'schen Sechsecken und Brianchon'schen Sechsseiten einschliessen.* Wenn zwei Dreiecke  $ABC = abc$  und  $A_1B_1C_1 \equiv a_1b_1c_1$  derselben Ebene dreien Geraden  $AA_1, BB_1, CC_1$  durch denselben Punkt eingeschrieben sind, liegen nach dem *Desargue'schen Satze* die Schnittpunkte  $aa_1, bb_1, cc_1$  in einer Gerade und umgekehrt. Wenn also  $AA_1, BB_1, CC_1$  ein Dreieck  $T$  bilden, sind  $aa_1, bb_1, cc_1$  die Ecken eines Dreiecks  $t$ . Beide verschwinden offenbar gleichzeitig. Die zwischen den Grössen  $\Delta_2(t)$  und  $\nabla_2(T)$  bestehende Relation soll gesucht werden. Es gilt dann ein zusammenhängendes System zu finden, welche dieselben umfassen. Ausser in den genannten Fälle verschwindet  $\Delta_2(t)$ , wie die Figur zeigt, auch mit  $\Delta_2(ABC)$  oder  $\Delta_2(A_1B_1C_1)$ , wenn nämlich  $ABC$  oder  $A_1B_1C_1$  drei Punkte einer Gerade sind; gleichzeitig werden dann auch  $\nabla_2(ABC)$  resp.  $\nabla_2(A_1B_1C_1)$  Null (vergl. 28). Letztere

Größen verschwinden aber auch, wenn  $abc$  resp.  $a_1b_1c_1$  durch denselben Punkt gehen und liefern dann ausserdem  $\nabla_2(T) = 0$ . Damit  $\nabla_2(t)$  oder  $\nabla_2(T) \infty$  werde, ist nothwendig, dass einer der Punkte  $aa_1$ ,  $bb_1$  oder  $cc_1$  ein  $\infty P$ , resp. eine Gerade  $AA_1$ ,  $BB_1$  oder  $CC_1$  focal ist, welche Bedingungen geschrieben werden können:

$$\sin aa_1 \cdot \sin bb_1 \cdot \sin cc_1 = 0$$

resp.

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 0.$$

Unendlichkeit für letzte beiden Producte führt andernfalls folgende Bedingungen mit:

$$\nabla_2(ABC) \cdot \nabla_2(A_1B_1C_1) = \infty,$$

resp.

$$\Delta_2(ABC) \cdot \Delta_2(A_1B_1C_1) = 0,$$

die ersten wegen focaler Geraden, die letztere wegen unendlich ferner Punkte. Hiermit ist das System fertig und lautet mit hinzugefügten unbestimmten Exponenten:

$$\Delta_2(t)^\alpha \cdot \nabla_2(T)^\beta [\Delta_2(ABC) \cdot \Delta_2(A_1B_1C_1)]^\gamma \cdot \nabla_2(ABC) \cdot \nabla_2(A_1B_1C_1)]^\delta.$$

76. Die singulären Fälle sind:

- 1) Die gegebenen Dreiecke, nähern sich daran, ein *Desargue'sches* System zu bilden;  $\Delta_2(t) = \varepsilon^1$  gesetzt, ist  $\nabla_2(T) = \varepsilon^1$ ; (am leichtesten gesehen, wenn man von einem solchen Systeme ausgeht und z.B.  $AB$  einen Winkel  $\varepsilon^1$  um  $A$  dreht) .  $\alpha + \beta = 0$
- 2) Für einen der gegebenen Dreiecke, z. B.  $ABC$ , nähern sich die Ecken daran, in einer Gerade zu liegen:  $\Delta_2(ABC) = \varepsilon^1$ ;  $\nabla_2(ABC) = \varepsilon^2$ ;  $\Delta_2(t) = \varepsilon^1$  . . . . .  $\alpha + \gamma + 2\delta = 0$
- 3) Für einen der gegeb. Dreiecke, z. B.  $ABC$ , nähern sich die Seiten daran, durch denselben Punkt zu gehen:  $\nabla_2(ABC) = \varepsilon^1$ ;  $\Delta_2(ABC) = \varepsilon^2$ ;  $\nabla_2(T) = \varepsilon^1$  . . . . .  $\beta + 2\gamma + \delta = 0$
- 4) Eine Ecke des  $t$  wird ein  $\infty P$ , z. B.  $a \neq a_1$ ;  $\Delta_2(t) = \varepsilon^1$ ;  $\sin aa_1 = \varepsilon^1$  . . . . .  $\alpha + \zeta = 0$
- 5) Eine Seite des  $T$ , z. B.  $AA_1$ , wird focal:  $\nabla_2(T) = \varepsilon^1$ ;  $AA_1 = \varepsilon^1$  . . . . .  $\beta + \eta = 0$

6) Ein der gegeb. Dreiecksecken, z. B.  $A$ , wird ein  $\infty P$ :

$$AA_1 = \varepsilon^{-1}; \Delta_2(ABC) = \varepsilon^{-1}; [\nabla_2(ABC) = \varepsilon^0] \dots \dots \dots - \gamma - \eta = 0$$

7) Eine der gegeb. Dreiecksseiten, z. B.  $a$ , wird focal:

$$\sin aa_1 = \varepsilon^{-1}; \nabla_2(ABC) = \varepsilon^{-1}; [\nabla_2(ABC) = \varepsilon^0] \dots \dots \dots - \delta - \zeta = 0.$$

Alle diesen Gleichungen werden durch das Werthsystem:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta : \xi = 1 : -1 : 1 : -1 : 1,$$

befriedigt. Um den constanten Werth des mit diesen Exponenten versehenen Products zu finden, bemerkt man, dass er in diesem Falle eine Zahl sein muss, weil es keine unvariirte metrische Grösse überhaupt mehr giebt (vergl. Art. 9). Am einfachsten wählt man eine Figur, wo  $AA_1BB_1CC_1$  ein reguläres Sechseck ist, und findet die Constante = 1. Man hat somit eine Formel, die folgendermaassen geschrieben werden kann:

$$\frac{\Delta_2(t) \sin aa_1 \sin bb_1 \sin cc_1}{\nabla_2(ABC) \nabla_2(A_1B_1C_1)} = \frac{\nabla_2(T) AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1}{\Delta_2(ABC) \cdot \Delta_2(A_1B_1C_1)}$$

77. Ich habe gewählt der gefundenen Formel diese Form zu geben mit Rücksicht auf denjenigen Uebergang, welchen das linke Glied zur Lehre vom *Pascal'schen* Sechsecke, das rechte zu der vom *Brianchon'schen* Sechsecke gestatten. Bezeichnet man nämlich die Schnittpunkte:

$$bc_1 \text{ mit } A_{01}, \quad b_1c \text{ mit } A_{10},$$

$$ca_1 \text{ » } B_{01}, \quad c_1a \text{ » } B_{10},$$

$$ab_1 \text{ » } C_{01}, \quad a_1b \text{ » } C_{10},$$

dann führt nach dem Satze vom *Pascal'schen* Sechsecke die Bedingung, dass die Ecken  $t$ 's in einer Geraden liegen, diejenige mit, dass das Sechseck  $CAB_{01}C_1A_1B_{10}$  einem Kegelschnitte eingeschrieben ist, und umgekehrt. Werden  $A, C, A_1$  und  $C_1$  mit sowohl  $B_{10}$  als  $B_{01}$  verbunden, und

bezeichnet man mit  $(B_{10})$  und  $(B_{01})$  die folgenden dadurch entstandenen Doppelverhältnisse\*):

$$(B_{10}) = \frac{\sin AB_{10}C_1 \cdot \sin CB_{10}A_1}{\sin CB_{10}A \cdot \sin C_1B_{10}A_1},$$

$$(B_{01}) = \frac{\sin AB_{01}C_1 \cdot \sin CB_{01}A_1}{\sin CB_{01}A \cdot \sin C_1B_{01}A_1},$$

ist die Differents:

$$(B_{10}) - (B_{01})$$

eine Grösse, welche im genannten Falle verschwindet und sich in der That ohne Schwierigkeit als mit dem linken Gliede der letzten Formel identisch zeigen wird:

$$(B_{10}) - (B_{01}) = \frac{\Delta_2(t) \cdot \sin aa_1 \cdot \sin bb_1 \cdot \sin cc_1}{\nabla_2(ABC) \cdot \nabla_2(A_1B_1C_1)}.$$

Die einfache Bedingung:

$$(B_{10}) - (B_{01}) = 0$$

führt nämlich nothwendig  $\Delta_2(t) = 0$  mit, und eine Bewegung von z. B.  $A$  um eine Strecke  $= \varepsilon^1$  längs der Geraden  $CA$  giebt, wenn die ursprüngliche Lage  $A$ 's einem Pascal'schen Sechsecke  $CAB_{01}C_1A_1B_{10}$  gehört, gleichzeitig:

$$(B_{10}) - (B_{01}) = \varepsilon^1, \quad \Delta_2(t) = \varepsilon^1.$$

Ebenso leitet

$$(B_{10}) - (B_{01}) = \infty,$$

durch entweder  $(B_{10}) = \infty$  oder  $(B_{01}) = \infty$ , jedes mal zu  $\nabla_2(ABC) = 0$  oder  $\nabla_2(A_1B_1C_1) = 0$ , was die Betrachtung einer Figur lehrt, mit demjenigen Zusatze, dass, wenn eine der ersten Grössen  $\varepsilon^{-1}$ , eine der letzten  $\varepsilon^1$  ist.

Weil die singulären Fälle für die übrigen Grössen des

---

\*) Hier geschieht die Bewegung von  $C$  nach  $A$  und von ungestrichenen nach gestrichenen Buchstaben.

Bruches nach der vorigen Art. diesen endlich lassen, steht nur zurück, theils dass der numerische Werth des Multiplikators 1 ist, theils dass man dann auch das wahre Vorzeichen erhält, zu zeigen. Beides wird gesehen, wenn  $A$  und  $C_1$  an einander genähert werden, wodurch  $(B_{01})$  verschwindet und  $(B_{10})$  an der Grenze sich mit dem Bruche identificirt.

Man bemerkt, dass die Bestimmung des Zeichens nach dem Vor. sowohl auf den Fortschrittsrichtungen  $ABC$  und  $A_1B_1C_1$ , welche weiter für  $\sin aa_1$  u. s. w. wie für die Grössen  $\nabla_2$  im Nenner und  $\Delta_2(t)$  bestimmend sind, als auf dem Uebergange von gestrichenen nach ungestrichenen Buchstaben beruht. Werden die letztere getauscht, wechseln  $(B_{10})$  und  $(B_{01})$ . — Daneben ist zu bemerken die schöne Uebereinstimmung zwischen der doppelte Bedingung, dass  $b \equiv b_1$  ist, mit derjenigen, dass:

$$(B_{10}) \equiv (B_{01}),$$

indem  $ACA_1C_1$  dann in einer Geraden liegen.

79. Werden in gleicher Weise wie in vor. Art.,

$$BC_1 \dots a_{01}, \quad B_1C \dots a_{10}$$

u. s. w.

genannt, führt die Bedingung, dass  $\nabla_2(T)$  verschwindet, die Folgerung mit, dass das Sechseit  $cab_{01}c_1a_1b_{10}$  einem Kegelschnitte umgeschrieben ist, und umgekehrt. Wenn man daher  $(b_{01})$  und  $(b_{10})$  eine mit  $(B_{10})$  und  $(B_{01})$  analoge Bedeutung giebt, wo die Figur beiläufig

$$(b_{10}) = (B_{10}) \text{ und } (b_{01}) = (B_{01})$$

zeigt, bekommt man entweder durch eine ganz analoge Betrachtung oder am einfachsten direct mit Hülfe der letzten Gleichungen, dass:

$$(b_{10}) - (b_{01}) = \frac{\nabla_2(T) AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1}{\Delta_2(ABC) \cdot \Delta_2(A_1B_1C_1)},$$



welche Formel der vorigen dualistisch entspricht und eine für ein nicht-Brianchon'sches Sechseck stattfindende Relation ausdrückt, so wie die vorige für ein nicht-Pascal'sches Sechseck und die Formel in Art. 76 für zwei nicht-Desargue'schen Dreiecke (Dreiseiten) — sämmtliche in der Art, dass bez. die Sätze Brianchons, Pascals und Desargue's daraus als specielle Fälle hervorgehen.

80. *Invarianten, welche Bedingungen dafür, dass sechs Punkte oder Tangenten derselben Kegelschnitte gehören, abgeben.* Wenn 6 willkürliche aber feste Punkte  $ABCDEF$  der Ebene in zwei Tripel\*) getheilt werden; wenn jedem Tripel drei andere zugeordnet werden, von einem Punkte desselben und zwei des anderen gebildet und zwar so, dass die neuen Tripel einander paarweise suppliren; wenn man endlich die Differenz der beiden Producten von den Grössen  $\Delta_2$  der somit gebildeten zwei Systeme von Tripeln bildet: *Dann hat jede solche Differenz, die sich von den gegebenen 6 Punkten bilden lässt, einen und denselben Werth, welcher gleich 0 gesetzt, dass die 6 Punkte demselben Kegelschnitte gehören, bezeichnet.* Diese das Sechseck characterisirende Constante hat somit eine mit  $\Delta_2$  für Dreiecke analoge Bedeutung.

Zunächst mag bemerkt werden, dass ein beliebiger Tripel einen Punkt mit dem einen, zwei Punkte mit dem andern von zwei willkürlichen supplementären Tripeln gemeinschaftlich hat, wesshalb immer von zwei willkürlichen der oben definirten Differenzen der eine einen Factor in jedem Gliede mit dem andern gemeinschaftlich hat. Hieraus erhellt, dass es hinreicht, die Identität z. B. der Differenzen:

$$\begin{aligned} & \Delta_2(ABC) \Delta_2(ADE) \Delta_2(BEF) \Delta_2(CFD) \\ & - \Delta_2(DEF) \Delta_2(BCF) \Delta_2(CAD) \Delta_2(ABE) \end{aligned}$$

\*) Mit Tripel bezeichne ich ein System von drei, mit Quadrupel von vier Elementen.

und :

$$\Delta_2(ABC) \Delta_2(AEF) \Delta_2(BFD) \Delta_2(CDE) \\ - \Delta_2(DEF) \Delta_2(BCD) \Delta_2(CAE) \Delta_2(ABF)$$

zu zeigen.

1) Die beiden Differenzen verschwinden gleichzeitig nämlich allein, wenn die sechs Punkte demselben Kegelschnitte gehören. Man benütze nur die Bemerkung in Art. 9 und nehme die Punkte  $ABCDE$  als fest,  $F$  als beweglich an; dann ist offenbar der Ort des  $F$ , wenn beide Differenzen gleich Null gesetzt werden, ein und derselbe Kegelschnitt, nämlich derjenige durch  $A, B, C, D$  und  $E$ , was nach und nach  $F = A$ ,  $F = B$  u. s. w. bestätigen. Sie verschwinden weiter beide als unendlich Kleine derselben Ordnung. Jede Differenz ist nämlich nur um einen nicht verschwindenden Factor von der Differenz zweier Doppelverhältnisse verschieden, welche Differenzen nach 78 gleichzeitig  $\varepsilon^1$  werden.

2) Ebenfalls werden unsere Differenzen gleichzeitig und zwar für unendlichen  $F$  unendlich, dann aber wieder von derselben Ordnung.

3) Jedenfalls sind sie somit proportional. Legt man aber  $F$  auf die Gerade  $DE$ , werden beide Subtrahenden Null und die Minuenden bekommen einen gemeinsamen Factor  $\Delta_2(ABC)$ . Die Figur zeigt dann augenblicklich die Identität zwischen den zurückstehenden Producten:

$$\Delta_2(ADE) \Delta_2(BEF) \Delta_2(CFD) \text{ und } \Delta_2(AEF) \Delta_2(BFD) \Delta_2(CDE),$$

in Folge dessen, dass jetzt  $DEF$  in einer Geraden liegen.

Somit ist der Beweis geführt und eine Invariante nachgewiesen, welche bis auf das Vorzeichen (wechseln zwei Punkte, ändert sich nämlich nur dieses) *eine symmetrische Funktion der 6 Punkte ist*, welche nur verschwindet, wenn alle Punkte demselben Kegelschnitte angehören, und nur dann unendlich

wird, wenn wenigstens einer Punkt ein  $\infty P$  ist. Ich nenne sie:

$$\Delta_2(ABCDEF).$$

81. Wenn analoger Weise  $abcdef$  sechs gegebene Geraden der Ebene sind, hat jede Differenz der Form:

$$\nabla_2(abc)\nabla_2(ade)\nabla_2(bef)\nabla_2(cfd) - \nabla_2(def)\nabla_2(bcf)\nabla_2(cad)\nabla_2(abe)$$

denselben Werth, wie auch die Geraden der Regel gemäss in Tripel vertheilt werden. Diese Invariante verschwindet nur, wenn die Geraden denselben Kegelschnitt berühren, wird unendlich nur, wenn eine der Geraden focal ist.

Der Beweis wird ganz wie der vorige geführt.

Wie die hier behandelten Sätze, welche in der That von den *Desargue'schen Involutionen* handeln, aus der abstracten Forderung, dass eine Kurve 2ter O. nur zwei Punkte mit einer Geraden (bez. eine Kurve 2ter Cl. nur zwei Geraden mit einem Punkte) gemeinsam hat, abgeleitet werden können, wird unten in einer Note (II) erörtert; dieselbe enthält daneben Analogien für die weiteren Kurventheorie.

82. Schöne Ausdrücke für die Grössen  $\Delta_2(ABCDEF)$  und  $\nabla_2(abcdef)$  werden erhalten, wenn man dieselben mit den früher in 78 und 79 gefundenen vergleicht. Macht man in 78  $CAB_{01}C_1A_1B_{10}$  mit  $ABCDEF$  in der vor. Art. identisch, bekommt man:

$$(B_{01}) - (B_{10}) = (C) - (F).$$

Letzterer Ausdruck ist nun gleich:

$$\frac{\Delta_2(ABCDEF)}{\Delta_2(ABC)\Delta_2(CDE)\Delta_2(DEF)\Delta_2(FAB)};$$

ersterer kann, wenn die  $\nabla_2$ -Ausdrücke im Nenner (s. 78) mit andern gleichwerthigen ersetzt sind, während der Zähler

als hinlänglich deutlich beibehalten ist, folgendermaassen geschrieben werden:

$$\frac{\Delta_2(t) \sin aa' \sin bb' \sin cc'}{AB. \sin FAB. \sin ABC. DE. \sin CDE. \sin DEF}.$$

Vergleicht man beide Ausdrücke, bekommt man, indem man Kürze halber die Seitenlängen der Reihe nach  $abc a'b'c'$  bezeichnet:

$$\Delta_2(ABCDEF) = \Delta_2(t). abc a'b'c' \sin aa'. \sin bb'. \sin cc'.$$

Die Formel bleibt geltend, in welcher Ordnung man auch die sechs Punkte verbindet. Jede neue Reihenfolge giebt einen neuen Ausdruck. Die Identität aller dieser giebt eine Reihe von weiteren Formeln.

Ganz analog erhält man mit leicht verständlicher Terminologi:

$$\nabla_2(abcdef) = \nabla_2(T). \sin A. \sin B. \sin C. \sin A'. \sin B'. \sin C'. AA'. BB'. CC',$$

wo wieder die Ordnung zwischen den Seiten eine Reihe von gleichwerthigen Ausdrücken veranlasst.

82. *Poncelet'sche Dreiecke.* Die bisherigen Theorien zeigen: Wenn ein Viereck  $PQRS$  einem zweiten  $ABCD$  in der Art ( $P$  auf  $AB$ , &c.) eingeschrieben ist, dass die Dreiecke  $PBQ$  und  $RDS$  ein Desargue'sches System bilden, werden von den Sechsecken  $PBQRDS$  und  $QCRSAP$ , das erste ein Brianchon'sches Sechseck das letztere ein Pascal'sches Sechseck und somit  $APS$  und  $CRQ$  *Poncelet'schen Dreiecke*, d. h. beide gleichzeitig einem gemeinsamen Kegelschnitte ein- und einem andern gemeinsamen umgeschrieben. Diese Bemerkung führt aber umgekehrt zu dem bekannten Satze. Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitte ein- und einem andern umgeschrieben ist, giebt es für dieselben beiden Kegelschnitte unendlich viele solchen Dreiecke.

Um nicht auf Betrachtungen einzugehen, die zu weit führen würden, soll ich hier nur eine frühere Zusage einlösen und den Beweis des im Art. 10 genannten Ausdrucks für die da besprochene Sehne  $K$  geben, wenn die beiden Kegelschnitte Kreise sind.

83. Die Bedeutung der Buchstaben wie im genannten Art. vorausgesetzt, ist es klar, dass:

- 1)  $K$  allein dann verschwindet, wenn  $BC$  zur Berührung mit dem Kreise  $(r)$  gebracht wird d. h., wenn  $A$  mit entweder  $B$  oder  $C$  coincidirt, was nur in den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten geschieht. Es verschwinden dann sowohl das Product  $p_1 p_2 p_3 p_4$  als die Höhe  $h_a$ ;
- 2)  $K$  ist nur dann  $\infty$ , wenn  $BC$  focal, in welchen Falle auch  $h_a = \infty$  ist;
- 3)  $h_a$ , welche nur im Falle (1) verschwindet, wird  $\infty$  ausser im Falle (2) zugleich, wenn  $A$  in  $I$  oder  $J$  fällt, da auch  $p_1 p_2 p_3 p_4 = \infty$  wird;
- 4) die letzte Grösse hat nur die in (1) und (3) genannten Singulärfälle.

Für das System:

$$K^\alpha h_a^\beta (p_1 p_2 p_3 p_4)^\gamma$$

geben nun die drei Singulärfälle die Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{1}{4} \alpha + \frac{1}{2} \beta + \gamma = 0,$$

$$(2) \quad -\alpha - \beta = 0,$$

$$-\beta - 4\gamma = 0,$$

welche von den Werthen:

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : -1 : \frac{1}{4},$$

befriedigt werden, und die Formel mitführt:



$$K = k \frac{h_a}{\sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_3}}.$$

Wählt man nun eine specielle Lage von  $A$ , z. B. in einem der endlichen Schnittpunkte der Kreise, findet man:

$$k = \frac{1}{\gamma} \cdot \sqrt[4]{(\gamma^2 - R^2 + 2Rr)(\gamma^2 - R^2 - 2Rr)},$$

und die zubeweisende Formel ist ermittelt.

## II. Gegebene symmetrische Functionen.

84. Wenn eine symmetrische Function vorgelegt ist und es gefragt wird, ob sie constant sei, wird für geometrische Untersuchung die synthetische Behandlung nach den gegenwärtigen Methoden in mannigfachen Fällen sehr bequem sein.

Die Function kann, wie in Art. 13 angedeutet, entweder in *Productform* (in der Form eines Bruches, wo Zähler und Nenner symmetrische Producten sind) oder in *polynomischer Form* (wo im Allgemeinen jedes Glied ein Bruch der genannten Form ist) gegeben sein.

### a. Productformen.

85. Die einfachsten Fälle sind diejenigen, wo es nur einer einzelnen Grösse oder einem Producte von einer einzelnen Reihe gleichartiger Grössen gilt.

Die Regel lautet dann einfach:

*Wenn die Bedingungen für Verschwinden und Unendlichkeit, sowohl was Individualität als Intensität betrifft, identisch sind, ist die Function constant.*

86. *Sätze von der dreispitzigen Hypocycloiden\*).*

I. *Die auf eine bewegliche Tangente abgeschnittene Sehne ist constant.* (Steiner). Sollte sie nämlich = 0 werden

\*) Vergl. dieses „Archiv“ Bd. VI. p. 151. Tidsskrift for Math. herausg. v. Zeuthen 1881, p. 190 (u. 1882, p. 103).

können, musste sie focal sein. Dies ist aber eben auch die Bedingung dafür, dass sie unendlich werden könne; weil nämlich die Kurve 4ter O., 3ter Cl. ist und  $\infty r$  in  $I$  und  $J$  berührt.

- II. *Die Tangenten in den Endpunkten der genannten Sehne stehen senkrecht zu einander.* (Steiner). Sin. der Winkel beider Tangenten kann gleich Null gedacht werden nur, wenn die bewegliche Tangente dieselbe singuläre Lage hat wie früher; allein auch hier decken sich die beiden Singulärbedingungen.

Dass der Winkel recht ist, bestätigt die Wahl einer Spitztangente.

- III. *Wenn man von einem beweglichen Punkte einer festen Tangente aus die beiden übrigen zieht, gehen die Bisectricen der Winkel zwischen den letzteren in festen Richtungen (also mit den beiden in II genannten Tangenten parallel).* Werden die Winkel zwischen der festen und den beweglichen Tangenten  $\mu$  und  $\nu$  genannt, sieht man wie oben, dass  $\sin \frac{\mu - \nu}{2}$  constant ist,

Hieraus folgt weiter:

- IV. *Wenn zwei Tangentenpaare von verschiedenen Punkten einer fünften gezogen sind, bilden sie ein Kreissehnenviereck.*

U. s. w.

87. *Wenn eine reelle Kurve mit der  $\infty r$  nur die Punkte  $I$  und  $J$  gemeinschaftlich hat (wenn sie »rein circulär« ist) ist das Product der Segmente  $PS_i$ , von einem festen Punkte  $P$  aus längs einer beweglichen Secante bis zu den Schnittpunkten  $S_i$  derselben mit der Kurve, constant. (Die Potenz des Punktes in Bez. auf die Kurve, öfters bemerkt, u. a. von Jul. Petersen).*

Verschwinden und Unendlichkeit verlangt identisch dieselbe Bedingung, nämlich dass die Sekante focal sei.

88. Wenn man von einem festen Punkte  $P$  aus Tangenten an einer Kurve  $m^{\text{ter}}$  Cl. zieht und jeder dieser eine der  $m$  in eine gegebenen Richtung gezogenen Tangenten zuordnet; wenn daneben der Schnittpunkt zweier zugeordneten Tangenten  $S_i$  ist: dann bleibt der Product aller  $m$  Abstände  $PS_i$  constant, wenn man die gegebene Tangentenrichtung variirt.

Dieses Product bekommt nämlich nur dann verschwindenden Factor, wenn die Richtung der beweglichen Tangenten diejenige einer der festen ist; gleichzeitig ist ein der andern Factoren  $\infty$ , und zwar, wenn der erste  $\varepsilon^1$  ist,  $\varepsilon^{-1}$ . Diese Fälle sind die einzigen singulären. Der Satz findet man vollständig in der folgenden Abtheilung wieder.

Weil wir später Gelegenheit haben werden mehrere Sätze dieser Art zu sehen, füge ich hier nur ein Theorem für Flächen 2ter O. hinzu, welches die Bedeutung des Moments zeigt und zu einer Reihe von neuen Sätzen über diese Flächen zu führen scheint.

Die Nabelpunkte einer Fläche 2ter O. sind 12, deren für reelle Flächen die imaginäre paarweise conjugirt sind, und die daher auf 6 reelle Geraden vertheilt werden können. Diese lassen sich wieder zu drei Paaren ordnen. Sind nämlich:

$$\alpha_1 b_1 c_1 d_1 \quad \alpha_2 b_2 c_2 d_2$$

die 6 focale Generatricen, vier von jeder Art, dann sind:

$$(a_1 b_2, b_1 a_2) \equiv l_{ab}, \quad (c_1 d_2, d_1 c_2) \equiv l_{cd}$$

ein solches Linienpaar; die in dieser Weise definirten Linienpaare sind in den drei Hauptschnitten gelegen.

Wenn  $g$  eine willkürliche Generatrice ist, bleibt das Product ihrer Momente in Bez. auf ein Paar,  $l_{ab}$ ,  $l_{cd}$ , constant:

$$M(gl_{ab}) \cdot M(gl_{cd}) = K.$$

Die Bedingung des Verschwindens ist, dass  $g$  eine der Geraden  $l_{ab}$  oder  $l_{cd}$  trifft, was aber nur für focale  $g$  geschieht, indem jede focale Generatrice wenigstens eine der Geraden eines Paares trifft. Somit decken sich abermals die beiden Singulärbedingungen, und der Satz ist bewiesen.

Für die hier besprochenen Linienpaare schlage ich den Namen: *Momentachsen der Fläche*, vor.

### b. Summeformeln.

89. Wir haben schon oben mehrere Beispiele solcher Formeln gesehen, namentlich unter der Behandlung einer aus vier Gliedern bestehenden Formel in Art. 80 obschon hier, wie berührt, keine absolute Symmetrie in äusserer Form stattfand, war doch das Verfahren in der That dasselbe, wie für ein symmetrisches Polynom.

In der am Anfange erwähnten Note im »Archiv«, habe ich nach dieser Methode den Satz bewiesen:

Wenn eine Gerade eine Kurve  $n^{\text{ter}}$   $O$ . unter den Winkeln  $\varphi_i$  in Punkten, wo die Krümmungshalbmesser  $\rho_i$  sind, schneidet, dann ist:

$$\sum_1^n \frac{1}{\rho_i \sin^3 \varphi_i} = 0,$$

wo die Zeichen der Winkel und somit diejenigen der Sin. übereinstimmend mit einer über sämtliche Zweige der Kurve fortgesetzten Umlaufsrichtung zu rechnen sind.

Der Beweis wird nicht hier wiederholt.

90. Derjenige Begriff, welcher dem Krümmungshalbmesser,  $\rho$ , metrisch dualistisch entspricht, ist die Krümmung,  $\frac{1}{\rho}$ .

Dies leuchtet ein, indem:

$$\rho = \lim. \frac{P_1 P_2}{\sin t_1 t_2}, \quad \frac{1}{\rho} = \lim. \frac{\sin t_1 t_2}{P_1 P_2},$$

wo  $(P_1 t_1)$  und  $(P_2 t_2)$  zwei benachbarte Connexe der Kurve sind.

Man sieht dasselbe auch ein, wenn man die Formel:

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta_2}{\nabla_2}$$

zu Grunde legt, und dieselbe einerseits auf das Dreieck dreier benachbarten Punkte anderseits auf das Dreieck dreier benachbarter Tangenten der Kurve überträgt.

Man hat dann:

$$\frac{1}{2} \cdot \lim. \frac{\Delta_2}{\nabla_2} (P_1 P_2 P_3) = \rho,$$

und

$$\frac{1}{2} \lim. \frac{\nabla_2}{\Delta_2} (t_1 t_2 t_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho},$$

wie eine Figur erklärt.

90. Mittelst dieser Dualität kann man nun sogleich den dem nächstvorigen entsprechenden Satz aufstellen:

*Wenn man von einem Punkte an einer Kurve  $m^{\text{ter}}$  Cl. Tangenten gleich  $t_i$  zieht und die Krümmungshalbmesser in den Berührungspunkten  $\rho_i$  sind, dann ist:*

$$\sum_1^m \frac{\rho_i}{t_i^3} = 0,$$

wo die Vorzeichen der Tangenten übereinstimmend mit der Umlaufsrichtung der Kurve zu rechnen sind.

Für Leser, welchen die citirte Note fremd ist, führe ich den Beweis dieses Satzes an, wie wohl er ganz analog mit dem dualistischen und auch wegen des Dualismus eigentlich überflüssig ist.

Zunächst ist der Satz für Kegelschnitte bekannt. Nach Art. 13 genügt es die Unendlichkeitsbedingung für ein einzelnes Glied:



$$\frac{\rho_1}{t^1}$$

zu untersuchen. Man bekommt zwei Fälle:

1)  $\rho_1 = \infty$ . Der Berührungspunkt ist ein  $\infty P$  oder ein Inflexionspunkt; weil aber für Kurven  $m^{\text{ter}}$  Cl. im Allgemeinen ein Inflexionspunkt nur mittelst zwei Bedingungen vorkommt, kann dieser Fall ausser Betracht gesetzt werden, indem der Satz sogleich auch für solche Kurven gilt, wenn er im Allgemeinen besteht. Wenn dagegen der Berührungspunkt ein  $\infty P$  ist, bleibt  $\frac{\rho_1}{t^1}$  endlich, indem man für die Kurve einen in diesem Punkte osculirenden Kegelschnitt substituiren kann, wodurch wegen der Gültigkeit des Satzes für Kegelschnitte dasselbe Glied sich endlich zeigt.

2)  $t = 0$ . Dieser Fall giebt:

a) Dass die Tangente focal ist; auch hier wird aber der Glied endlich, z. B. wegen der Formel in Art. 66 oder 68, wenn man nicht dasselbe Raisonement wie in 1) anzuwenden vorzieht.

b) Dass der gegebene Punkt auf der Kurve liegt. Hier bekommt man eine Anwendung des Art. 14. Es gilt zu zeigen, dass es unter den  $\infty^1$  Lagen eines Punktes eine endliche Anzahl giebt, die unsere Summe weder unendlich noch unbestimmt machen. Solche Punkte sind nun diejenige, wo es sechspunktig berührende Kegelschnitte an die Kurve gelegt werden können. Hier verhalten sich zwei benachbarte Berührungspunkte wie auf einem Kegelschnitte; die beide unendliche Glieder haben eine algebraische Summe = 0.

Somit ist gezeigt, dass die Summe immer endlich bleibt, d. h. constant ist. Um den Werth dieser Constante zu finden bemerkt man, dass die Wahl des Punktes auf einer Spitztangente alle übrige Tangenten, ihre Berührungspunkte und Krümmungen als einer Kurve  $m - 1^{\text{ter}}$  Cl. gehörend

bestimmt. Die Constante ist somit für alle Kurven dieselbe, d. h.  $= 0$ , weil sie diesen Werth für Kegelschnitte hat. — Man könnte auch den Punkt einfach in einem  $\infty P$  wählen, wodurch sämtliche Glieder verschwanden.

Die Bedeutung der vollkommenen Analogie zwischen diesem Beweise und demjenigen in der besprochenen Note ist eben in dem Dualismus zu suchen, ein Dualismus, der ebenso wie der descriptive den Uebergang von einer Formel zur entsprechenden gestattet.

91. Wenn die Kurve 3ter O. ist und der Punkt im Schnittpunkte zweier Inflexionstangenten liegt, verschwinden vier Glieder. Es stehen nur zwei übrig, welche dann gleichzeitig einem Kegelschnitte gehören. Die beiden entsprechenden Berührungspunkte liegen dann auf einer Geraden mit dem dritten Wendpunkte.

Für Kurven  $n^{\text{ter}}$  Ord. im Allgemeinen bekommt man, indem der Punkt im Unendlichen gewählt wird, wobei alle Tangenten als gleich gross anzusehen sind, einen Satz von *Liouville*:

*Die algebraische Summe paralleler Krümmungshalbmesser ist 0.*

92. Da, wo der letzte Satz bewiesen ist (*Liouvilles Journal*, Bd. VI. p. 345 fg.) ist eine ganze Reihe von ähnlichen Sätzen entwickelt, welche sich in der gegenwärtigen Weise sehr bequem beweisen lassen. Von denselben ist hervorzuheben:

*Die Summe der Cotang. derjenigen Winkel, unter welchen sich zwei Kurven schneiden, ist der Summe der Cotang. derjenigen Winkel gleich, unter welchen die Asymptoten der einen diejenigen der andern schneiden.*

Denn ein Glied der ersten Summe ist unendlich entweder gleichzeitig und von gleicher Ordnung mit einer der

ändern, oder gleichzeitig mit einem andern Gliede, und letzteres zwar so, dass beide Glieder, wie die Grenzuntersuchung an einer Figur zeigt, eine endliche algebraische Summe geben.

Differentiirt man diese Formel in Bezug auf diejenige Variation, welche sie leidet, wenn man statt der gegebenen eine andere mit denselben Asymptoten versehene benachbarte Kurve betrachtet, kommt man zur Formel:

$$\sum_{1}^{nn'} \frac{1}{\rho_i \sin^3 \varphi_i} = 0,$$

welche die in der Art. 89 umfasst, wo nämlich *die Summation über alle nn' Schnittpunkte beider Kurven auszustrecken ist*;  $\varphi_i$  sind die Schnittwinkel,  $\rho_i$  die Krümmungshalbmesser der einen Kurve in den Schnittpunkten.

Metrisch dualistisch bekommt man daher auch:

$$\sum_{1}^{mm'} \frac{\rho_i}{t_i^3} = 0,$$

wo  $t_i$  die Längen der gemeinsamen Tangenten,  $\rho_i$  die Krümmungshalbmesser der einen Kurve in den Berührungspunkten der genannten Tangenten sind, und die Summation über sämtliche diese zu erstrecken ist.

### III. Specielle Anwendung auf algebraische ebene Kurven.

94. *Die Bedingung dafür, dass ein Punkt auf einer Kurve liegt. Der Normalwerth eines Punktes.* Es seien gegeben eine feste Kurve  $n^{\text{ter}}$  O. und ein beliebiger Punkt P, der zunächst nicht auf der Kurve liegen darf. Die Asymptoten der Kurve seien  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , deren keine focal. Eine durch P gelegene Secante g schneide die Kurve in  $S_1, S_2 \dots S_n$ . Dann ist das Product:

$$\prod_1^n PS_i \cdot \prod_1^n \sin g a_i$$

constant für jede Richtung der Secante. Denn um Null zu werden, muss das Product einen Factor entweder  $PS_i = 0$  oder  $\sin g a_i = 0$  haben. Im ersten Falle wurde die  $g$  focal, d. h. für  $\prod_1^n PS_i = \varepsilon^n$ ,  $\prod_1^n \sin g a_i = \varepsilon^{-n}$ ,  $\alpha$ : das Product endlich sein, — wie später zu zeigen, ein Fall von specieller Interesse. Im letzteren wurde z. B.  $g \neq a_1$ , d. h.  $\prod_1^n \sin g a_i = \varepsilon^1$ ,  $\prod_1^n PS_i = \varepsilon^{-1}$ , und das Product somit immer endlich.

Dieses constante Product beruht nur auf der Natur der Curve und der Lage des Punktes in Bezug auf sie. *Es ist Null nur, wenn der Punkt auf der Curve liegt, unendlich nur, wenn entweder der Punkt ins Unendliche rückt oder die Curve circuläre Zweige besitzt.*

Ich habe diese Grösse den Normalwerth des Punktes in Bezug auf die Curve genannt und bezeichne sie mit:

$$(Pk_n).$$

Die Bedingung dafür, dass ein Punkt auf einer Curve liegt, ist somit, dass sein Normalwerth in Bezug auf die Curve verschwindet.

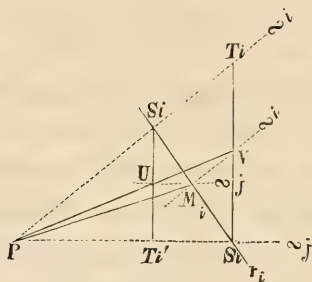
Ein interessanter und oftmals wichtiger Ausdruck für  $(Pk_n)$  bekommt man, wenn der Secante eine der beiden ausgezeichneten Richtungen  $\infty i$  oder  $\infty j$  gegeben wird. Diese Geraden haben nämlich mit reellen  $k_n$   $n$  conjugirte Schnittpunktpaare, welche  $n$  reelle Geraden:  $r_1, r_2, \dots r_n$  bestimmen.

Es seien  $S_i$  und  $S_i'$  (s. die Fig. auf der nächsten Seite) zwei solche conjugirte Schnittpunkte. Es werden nun gebildet:

$$PS_i \sin(\infty i a_i)$$

und

$$PS_i' \sin(\infty j a_i),$$



dann sind dies die Abstände  $P$ 's von den beiden durch  $S_i$  und  $S_i'$  mit  $a_i$  parallel gezogenen Geraden; erstere dieser schneide  $PJ$  in  $T_i'$ , letztere  $PI$  in  $T_i$ . Es seien die Mittelpunkte zwischen  $S_i$  und  $T_i'$ ,  $S_i'$  und  $T_i$  bez.  $U$  und  $V$ , dann sind die obigen Ausdrücke gleich  $PU$  und  $PV$ , wobei zu bemerken ist, dass  $P$ ,  $U$  und  $V$  in einer Geraden liegen. Man sieht aber auch, dass einer der beiden durch  $U$  und  $V$  hindurchgelegten Nullkreise zum Centrum den Mittelpunkt  $M_i$  zwischen  $S_i$  und  $S_i'$  hat. Hieraus folgt:

$$PU \cdot PV = PM_i^2 = (Pr_i)^2.$$

Durch Multiplication der beiden Ausdrücke für  $(Pk_n)$ , wenn die Secante focale Richtungen bekommt, erhält man somit:

$$(Pk_n) = \prod_1^n (PM_i) = \prod_1^n (Pr_i).$$

Ueber meine Vorgänger auf diesem Bereiche enthält Note (III) einen kurzen Bericht.

95. *Die Bedingung dafür, dass eine Gerade eine Kurve berührt. Der Normalwerth einer Geraden.* Eine feste Kurve  $m^{\text{ter}} \text{ Cl.}$ ,  $K_m$  und eine zunächst die Kurve nicht berührende Gerade  $g$  seien gegeben. Die reellen Brennpunkte der Kurve seien  $B_1, B_2, \dots B_m$ , sämtliche im Endlichen gelegen. Die Tangenten von einem beweglichen Punkte  $P$  der Geraden  $g$  seien  $t_1, t_2, \dots t_n$ . Dann ist das Product:



$$\prod_1^m \sin g t_i \cdot \prod_1^m PB_i$$

constant. Der Satz entspricht metrisch dualistisch dem vorigen. Die singulären Fälle sind:

$$1) t_i \text{ ist focal: } \prod_1^m \sin g t_i = \varepsilon^{-1}; \prod_1^m PB_i = \varepsilon^1.$$

$$2) P \text{ ist der } \infty P: \prod_1^m \sin g t_i = \varepsilon^m; \prod_1^m PB_i = \varepsilon^{-m}.$$

Diese Constante, die somit nur dann verschwindet, wenn  $g$   $k_m$  berührt, und dann unendlich ist, wenn entweder  $g$  focal ist oder  $k_m$  einen parabolischen Zweig besitzt, habe ich den Normalwerth der Geraden in Bez. auf die Kurve genannt und bezeichne sie mit:

$$(g K_m).$$

Die Bedingung dafür, dass eine Gerade eine Kurve berührt, ist somit, dass ihr Normalwerth in Bez. auf die Kurve verschwindet.

Wie  $(Pk_n)$  bekommt  $(gK_m)$  einen besonderen Ausdruck, wenn das bewegliche Element ein unendlich fernes ist, also wenn hier  $P$  der  $\infty P$  der  $g$  ist. Jedes Product:

$$PB_i \sin g t_i$$

nähert sich dann an  $(C_i g)$ , wo  $C_i$  die Contactpunkte der mit  $g$  parallelen Tangenten sind, und man bekommt:

$$(gK_m) = \prod_1^m (C_i g),$$

d. h. das Product aller Entfernungen  $g$ 's von den mit ihr parallelen Tangenten.

96. Aenderungen, welche eintreten, wenn der Normalwerth in Folge der Natur der Kurve unendlich wird.

Wir denken uns erstens, dass  $k_n$  die  $\infty r$  einmal in jedem Kreispunkte schneidet. Dies führt offenbar für jeden endlichen Punkt  $P$  zu:

$$(Pk_n) \equiv \infty.$$

Dagegen wird derjenige Ausdruck endlich und constant, welcher entsteht, wenn im Producte  $\prod \sin g a_i$  der Grösse  $(P k_n)$  für  $a_i$  nur die  $n - 2$  nicht focalen Asymptoten hineingesetzt werden. Im Allgemeinen, wenn die Kurve die  $\infty$   $p$ -mal in jedem Kreispunkte schneidet, wird analoger Weise

$$\prod_1^n P S_i \cdot \prod_1^{n-2p} \sin g a_i,$$

wo nur die nicht-focalen Asymptoten vorkommen, constant sein. Ein solcher Ausdruck soll *reducirter Normalwerth* heissen. Für  $n = p$  ist die Kurve *rein circular*, und der reducirte Normalwerth damit, was wir in 87 Potenz in Bez. auf eine solche Kurve genannt haben\*), identisch.

Etwas Aehnliches findet für  $(g K_m)$  Statt, wenn  $K_m$  parabolische Zweige hat. Dann ist für jede nicht focale Gerade  $g$ :

$$(g K_m) \equiv 0.$$

Dagegen ist derjenige Ausdruck endlich und constant, welcher entsteht, wenn das Product  $\prod P B_i$  auf die endlichen Brennpunkte beschränkt wird und somit die unendlich fernen Contactpunkte mit  $\infty$  nicht mitgenommen werden. Diese Constante ist dann wieder *ein reducirter Normalwerth* \*\*).

97. Es ist jetzt leicht zu erkennen, dass die in 88 nachgewiesene Constante dem wichtigen Werthe:  $\prod_1^m (P B_i)$ , dem Producte der Focaldistanzen  $P$ 's, gleich ist. Dies geht aus der Formel:

\*) Die Ausdrücke  $\prod (P r_i)$  und  $\prod (P M_i)$  untergehen anderen Veränderungen, indem  $p$  Factoren auftreten von der Form  $2 P O_i$ , wo  $O_i$  die  $p$  Schnittpunkte der paarweise conjugirten focalen Asymptoten sind.

\*\*) Auch im Ausdrucke  $\prod (C_i g)$  sind die  $C_i$  auf endliche Contactpunkte zu beschränken. Dabei werden die unendliche durch neue Factoren der Form  $\sin (g a_i)$  repräsentirt, wo  $a_i$  die Richtungen der  $\infty$   $P$ 's der parabolischen Zweige sind.

$$(gK) = \prod_1^m PB_i \prod_1^m \sin gt_i = \prod_1^m (gC_i)$$

hervor, woraus:

$$\prod_1^m PB_i = \frac{\prod_1^m (gC_i)}{\prod_1^m \sin gt_i},$$

welcher letzte Ausdruck eben der in 88  $\prod_1^m PS_i$  genannte ist.

## 98. Beispiele.

I.  $(Pk_n) = 0$

ist in analytischer Hinsicht von der Gleichung der Kurve  $k_n$  in Punkteordinaten nicht verschieden; speciel ist diese Form der Gleichung eben die vom Verfasser (Math. Ann. Bd. 11) definirte mit der sogenannten »Hesse'schen Normalform« der Geraden analog gebildete *Normalform* der Kurven-gleichung\*).

II.  $(Pk_n) = c$

giebt für alle Werthe der Constante  $c$  die ganze Reihe von Kurven, welche man ein System von *Niveaukurven* nennt.

$$(Pk_1) + \lambda (Pk_2) = 0,$$

wo die Kurven  $k_1$  und  $k_2$  beide  $n^{\text{ter}}$  O. zu denken sind, geben, wenn  $\lambda$  variirt, den Kurvenbüschel über die Kurven  $k_1$  und  $k_2$  gebildet. Die einem gewissen Werthe von  $\lambda$  entsprechende Kurve sei  $k_3$ , eine willkürliche ihrer Asymptoten  $a_3$ , dann sieht man:

---

\*) In welcher jeder lineare Factor des Gliedes  $n^{\text{ter}}$  Dimension in Normalform auftritt und das ganze Glied als Product dieser Factoren keinen weiteren Multiplicator irgend welcher Art besitzt.

$$\lambda = - \frac{\prod_1^n \sin a_3 a_{1i}}{\prod_1^n \sin a_3 a_{2i}}$$

oder, weil jede  $a_3$  denselben  $\lambda$  liefert:

$$\lambda = \frac{\sqrt{\prod_1^n \sin a_{3i} a_{1j}}}{\sqrt{\prod_1^n \sin a_{3i} a_{2j}}}.$$

Hieraus folgt allgemeiner:

$$(Pk_1) \sqrt{\prod_1^n \sin a_{2i} a_{3i}} + (Pk_2) \sqrt{\prod_1^n \sin a_{3i} a_{1j}} + (Pk_3) \sqrt{\prod_1^n \sin a_{1i} a_{2j}} = 0,$$

wo die Summation algebraisch zu verstehen ist, und wo übrigens  $P$  ein ganz willkürlicher Punkt der Ebene sein kann.

IV. Der Ausdruck  $(Pk_n)$  hat, wenn er für feste  $k_n$  und nach und nach alle Punkte der Ebene gebildet wird, gewisse Maxima und Minima. Solche Punkte sind diejenigen, wo eine der Niveaukurven einen isolirten Punkt besitzt, d. h. einen Doppelpunkt mit zwei imaginären Tangenten. Doppelpunkte mit reellen Tangenten sind dagegen Punkte, wo  $(Pk)$  nach den beiden Richtungen constanten Werth behält.

#### 99. Fortsetzung:

$$V. \quad (gK_m) = 0$$

ist in analytischer Beziehung von der Gleichung der Kurve in Liniencoordinaten nicht verschieden, und zwar in einer Normalform gestellt.

$$VI. \quad (gK_m) = c$$

giebt eine Reihe von Kurven, welche ein und dasselbe System von Grundpunkten, namentlich dieselben Brennpunkte besitzen.

$$\text{VII.} \quad (gK_1) + \lambda (gK_2) = 0,$$

wo Einfachheit halber die Kurven von derselben Classe zu denken sind, giebt, je nachdem man  $\lambda$  variirt, den durch  $K_1$  und  $K_2$  definirten als Liniengebilde betrachteten Kurvenbüschel. Es sei für gegebenen Werth des Parameters  $\lambda$  die entsprechende Kurve  $K_3$  und ein beliebiger ihrer Brennpunkte  $B_3$ , dann findet man, indem man die Quadratwurzel des von den Normalwerthen der beiden von  $B_3$  gezogenen focalen Tangenten gebildeten Productes zieht:

$$\lambda = - \frac{\prod_1^m B_3 B_{1i}}{\prod_1^m B_3 B_{2i}}.$$

Um diese Formel zu ermitteln braucht man einen vermittelst der Eigenschaften der focalen Geraden leicht zu beweisenden Satz:

$$\frac{\sin(a \infty i) \sin(a \infty j)}{\sin(b \infty i) \sin(b \infty j)} = 1.$$

ist absolut = 1.

Weil hier die Wahl des Punktes  $B_3$   $\lambda$  ungeändert lässt, bekommt man, wie oben:

$$(gK_1) \sqrt[m]{\prod_1^m B_{2i} B_{3j}} + (gK_2) \sqrt[m]{\prod_1^m B_{3i} B_{1j}} + (gK_3) \sqrt[m]{\prod_1^m B_{1i} B_{2j}} = 0,$$

wo wieder die Summe algebraisch zu verstehen ist;  $g$  ist eine beliebige Gerade der Ebene. Wählt man  $g \equiv \infty r$ , und erinnert, dass

$$\lim \frac{(\infty r K_1)}{(\infty r K_3)} = \lim \frac{(\infty r K_2)}{(\infty r K_3)} = 1,$$

hat man die schöne Formel:

$$\sqrt[m]{\prod_1^m B_{1i} B_{2j}} + \sqrt[m]{\prod_1^m B_{2i} B_{3j}} + \sqrt[m]{\prod_1^m B_{3i} B_{1j}} = 0.$$



Für drei in derselben Vierseite eingeschriebene Kegelschnitte giebt sie eine einfache Relation der Distancen der Brennpunkte unter einander. Man wähle z. B. die drei Punktpaare, welche Ecken im vollständigen Vierseit bilden.

VIII. Die Grösse  $(gK)$ , wo  $K$  fest und  $g$  nach und nach alle Geraden der Ebene ist, bekommt gewisse Maxima und Minima, welche solchen  $g$  entsprechen, die isolirte Geraden des Systemes,

$$(gK) = c,$$

sind, d. h. Doppeltangenten, deren zwei Berührungspunkte imaginär sind. Man bemerkt, dass die entsprechende Theile einer benachbarten Kurve des Systems sich an die Form einer Hyperbel nähert, die eben seine Zweige in die »imaginäre Achse« vereinigt.

100. Die Analogie, welche hier zwischen Asymptoten und Brennpunkten stattfindet, ist bekanntlich nicht neu, sondern schon von *Salmon* (*Higher plane curves*) hervorgehoben. Hier ist aber nicht zu vergessen, dass in gewissen Beziehungen den Asymptoten nicht immer die Brennpunkte sondern diejenigen Punkte  $Q_i$  der Kurve, wo die Tangenten focal sind, entsprechen, welche Punkte somit in gewisse Formeln statt jener auftreten.

101. Namentlich hat es zuweilen Interesse einen einfachen Ausdruck für das Product der Abstände einer Geraden  $g$  von sämtlichen Punkten  $Q_i$  einer Kurve zu besitzen. Zu diesem Zwecke erweitern wir den von der Kegelschnittslehre bekannten Begriff einer *Directrice*, indem damit zu verstehen werden soll die *Contactsecante*, welche die Berührungspunkte zweier von einem Brennpunkte ausgehenden focalen Tangenten verbindet. Die reelle  $K_m$  hat somit  $m$  reelle Directricen  $d_i$ , welche  $g$  in  $m$  Punkte  $M_i$  schneiden. Das Product der Abstände  $g$ 's von den beiden auf  $d_i$  gelegenen Punkten  $Q_i$  ist dann :

$$\overline{B_i M_i}^2 \cdot \sin^2 g d_i$$

und somit das gesuchte Product:

$$\prod_1^m (B_i M_i \cdot \sin g d_i)^2.$$

Im Allgemeinen tritt einfach die Quadratwurzel auf.

102. Die Anzahl der *Normalen* von einem Punkte aus an eine Kurve ( $k_n \equiv K_m$ ) ist bekanntlich  $n + m$ . In der schon citirten Note in Math. Ann., 11ter Bd., lieferte ich den ersten Beweis einiger früher von *Laguerre* (Comptes rendus, Bd. LX p. 70) in etwas abweichender Form ausgesprochenen, übrigens von mir selbständig gefundenen Sätze vom Producte  $\prod_1^{m+n} n_i$  der vom Punkte  $P$  aus gezogenen Normalen. Seien  $B_i$  die Brennpunkte,  $a_i$  die Asymptoten der Kurve und  $t_i$  die Längen der von  $P$  aus gezogenen Tangenten, dann bekommt man:

$$\prod_1^{m+n} n_i = (Pk) \cdot \prod_1^m PB_i = \prod_1^m t_i \cdot \prod_1^n Pa_i.$$

Der Beweis ist in der gewöhnlichen Weise zu führen. Es wurde übrigens bemerkt, dass die Identität der beiden ersten Ausdrücke noch besteht, wenn die Kurve parabolische, so wie die Identität der 1sten und 3ten noch, wenn die Kurve focale Zweige bekommt, wenn man sich nur auf endliche Elemente beschränkt.

102. Im Artikel in *Bul. d. l. Soc. Math.* gab ich eine beträchtliche Erweiterung dieser Sätze.

Es seien  $k_n \equiv K_m$  und  $k'_{n'} \equiv K'_{m'}$  zwei Kurven, deren Brennpunkte bez.  $B_i$  und  $B'_i$ , Asymptoten  $a_i$  und  $a'_i$ ; dann ist das Product aller  $mn' + m'n + mm'$  gemeinschaftlichen Normalen  $n_i$ , jede zwischen beiden Fusspunkten gerechnet:

$$\prod_1^{mn'+m'n+mm'} n_i = \prod_1^n (a_i K') \cdot \prod_1^{n'} (a'_i K) \cdot \prod_1^{mm'} t_i,$$

wo  $t_i$  die Längen der gemeinschaftlichen Tangenten zwischen beiden Contactpunkten gerechnet sind.

Wenn die eine Kurve ein Punkt ist, bekommt man die Identität zwischen 1ster und 3ter Grösse der vorigen Formel.

Ist die eine Kurve eine Gerade, hat man den letzten der in Art. 95 gefundenen Ausdrücke für den Normalwerth derselben in Bez. auf die andere. Der Beweis ist einfach. Man bekommt vier singuläre Fälle:

- 1) Die Kurven berühren einander;
- 2) eine gemeinschaftliche Normale, welche dann auch gemeinschaftliche Tangente ist, ist focal;
- 3) die eine Kurve besitzt einen parabolischen Zweig;
- 4) oder passirt durch  $I$  und  $J$ .

In allen diesen Fällen werden die Exponentengleichungen befriedigt. Endlich ist die Constante eine Zahl, weil das System absolut variabel ist, und zwar = 1, wie man findet, sobald man die beiden Kurven in Geradensysteme ausarten lässt.

103. Es giebt auch eine der Identität zwischen 1stem und 2tem Ausdrücke des Art 102 entsprechende Formel für ein System von zwei Kurven, indem man sich nämlich von den in 101 eingeführten Grössen bedient. Führt man nämlich statt  $\prod_1^{mn'} t_i$  den analogen Ausdruck, das Product,  $\prod_1^{nn} \sin \varphi_i$ , aller Sin. der Schnittwinkel, ein, findet man:

$$\prod_1^{mn'+mn'+m'n} n_i = \frac{\sqrt{\prod_1^{2mn'} (Q'k') \cdot \prod_1^{2m'n} (Q'k)} \cdot \prod_1^{nn'} \sin \varphi_i \cdot \prod_1^{mm'} B_i B_j'}{\prod_1^{nn'} \sin a_i a_j}$$

Es giebt nun Geraden der Art  $r_i$  (s. Art. 94) in Bezug auf die  $B_i$ . Werden diese als Geraden  $g$  des Art. 95 betrachtet, geht die Formel in die folgende über:

$$\prod_{1}^{mm'+mn'+m'n} n_i = \frac{\prod_{1}^{mn'} (B_i M_i' \cdot \sin r_i' s_i) \prod_{1}^{m'n} (B_i M_i \cdot \sin r_i s_i') \prod_{1}^{nn'} \sin \varphi_i \prod_{1}^{mm'} B_i B_j'}{\prod_{1}^{nn'} \sin \alpha_i \alpha_j'}$$

welche die genannte Erweiterung liefert. Wenn man nämlich als die eine Kurve einen Punkt nimmt, bekommt man die besprochene frühere Formel.

Wählt man als die eine Kurve eine Gerade, hat man einen neuen Ausdruck für ihren Normalwerth:

$$(gK) = \frac{\prod_{1}^m (B_i M_i \cdot \sin g s_i) \cdot \prod_{1}^n \sin \varphi_i}{\prod_{1}^n \sin \alpha_i}$$

$M_i$  sind noch immer die Schnittpunkte der Geraden  $g$  mit den Directricen  $s_i$ , und die Formel, explicit in Bez. auf  $\prod_{1}^n \sin \varphi_i$ , ist als mit derjenigen für  $\prod_{1}^m t_i$  durch  $(Pk)$  analog anzusehen.

104. Nahe verwandt mit der Aufgabe, Normalen zu ziehen, ist, die Geraden, welche die Kurven unter gegebenen Winkel schneiden, zu suchen. Dieses Problem ist ebenfalls sowohl von Laguerre als in der citirten Note in Math. Ann. behandelt. Auch keine Schwierigkeit bietet die Ausdehnung des Satzes daran, Geraden zu gelten, welche zwei gegebene Kurven unter gegebenen Winkeln schneiden. Das Wesentliche der früheren Formeln bleibt ungeändert; nur treten einige Divisoren auf ganz wie in der Dreiecksformel:

$$c \equiv AB = \frac{h_a}{\sin B}.$$

105. *Discriminanten.* Gehen wir demnächst zu einer Reihe von Sätzen über, welche das metrische Analogon zum analytischen Uebergange von der Ordnungsgleichung zur Classengleichung einer Kurve leisten, und somit zugleich

das Pendant zu dem in den *Plücker'schen* Formeln enthaltenen Phänomene abgeben. Durch einen eigenthümlichen Raisonement über diejenigen Factoren, in welchen naturgemäss gewisse hierher gehörende Discriminantausdrücke sich spalten, fand *Cayley* in grossen Zügen (*Crelles Journal*, Bd. XXXIV, p. 30) die descriptive Seite einer der hier zu beweisenden Formeln. Mit dieser Vorarbeit war ich unbekannt, als ich im Begriffe stand meine Resultate in *Bul. d. Soc. Math.* zu veröffentlichen. Indessen entspringt meine entsprechende Formel so selbständig aus meiner ganzen Methode, und trägt daneben ausser der *Cayley'schen* descriptiven Form den nöthigen metrischen Character so ausgeprägt, dass sie als ganz neu darf angesehen werden. Es kam damals hinzu die dualistisch entsprechende, der eine descriptive Vorarbeit bisher fehlte, wie auch mehrere andern, die sich an dieselben schliessen.

106. Es gilt hier einen Ausdruck zu finden für das Product aller Segmente  $S_i S_j$ , die eine Kurve  $k_n \equiv K_m$  von einer Geraden  $g$  ausschneidet. Dieser Ausdruck ist eine *Discriminante*. Metrisch lässt er sich folgendermaassen bestimmen:

$$\prod_1^{n(n-1)} S_i S_j \text{ verschwindet:}$$

- 1) wenn  $g$  die Kurve berührt,  $\alpha$ : für  $(gK) = 0$ ;
- 2) wenn  $g$  durch einen der  $d$  Doppelpunkte  $D_i$  der Kurve geht,  
 $\alpha$ : für  $\prod_1^d D_i g = 0$ ;
- 3) wenn  $g$  durch einen der  $r$  Spitzen  $R_i$  geht,  $\alpha$ : für  $\prod_1^r R_i g = 0$ ;
- 4) wenn  $g$  sich daran nähert, focal zu werden. Dann werden die anderen genannten Grössen  $\infty$ .

Endlich wird unser Ausdruck  $\infty$ :

- 5) nur dann, wenn  $g$  mit einer der Asymptoten parallel wird,  $\alpha$ : für  $\prod_1^n \sin g a_i = 0$ .



Es sind hier in Alles fünf Grössen vorgekommen. Sie bilden ein vollständiges System, und man findet:

$$\prod_1^{n(n-1)} (S_i S_j)^2 = \frac{C \cdot (gK) \cdot \left( \prod_1^d D_i g \right)^2 \left( \prod_1^r R_i g \right)^3}{\left( \prod_1^n \sin g a_i \right)^{2(n-1)}},$$

wo  $C$  eine Constante ist.

Die singulären Fälle sind die genannten fünf:

- 1)  $g$  nähert sich daran, zu berühren:  $\prod S_i S_j = \varepsilon^{\frac{1}{2}}; (gK) = \varepsilon^1.$
- 2) — — — ein  $D_i$  zu passiren:  $\prod S_i S_j = \varepsilon^1; \prod_1^d D_i g = \varepsilon^1.$
- 3) — — — ein  $R_i$  zu passiren:  $\prod S_i S_j = \varepsilon^{\frac{3}{2}}; \prod_1^r R_i g = \varepsilon^1.$
- 4) — — —  $\neq a_i$  zu werden:  $\prod S_i S_j = \varepsilon^{-(n-1)}; \prod_1^n \sin a_i = \varepsilon^1.$
- 5) — — — focal zu werden:  $\prod S_i S_j = \varepsilon^{\frac{n(n-1)}{2}}; (gK) = \varepsilon^{-n};$   
 $\prod_1^d D_i g = \varepsilon^{-d}; \prod_1^r R_i g = \varepsilon^{-r}; \prod_1^n \sin g a_i = \varepsilon^{-n}.$

Die hier gefundenen Werthen stimmen alle, die fünfte Reihe wegen der Plücker'schen Gleichung:

$$m = n(n-1) - 2d - 3r.$$

Um  $C$  zu bestimmen reicht es hin den Grenzausdruck zu suchen, wenn  $g$  ins Unendliche rückt. Das ganze System kann dann als demjenigen ähnlich betrachtet werden, welches von  $n+1$  einander schneidenden Geraden besteht, derer  $n$  durch denselben Punkt gehen. Vermittelst der elementaren Formel für einem Dreiecke  $ABC$ :

$$\frac{a}{h_a} \sin B \cdot \sin C = \sin A,$$

welche am vorliegenden Systeme  $n(n-1)$  Mal zur Anwendung kommt, findet man:

$$C = \prod_1^{\frac{n(n-1)}{2}} \sin^2 a_i a_i.$$

Hieraus die Formel, welche auch geschrieben werden kann:

$$\prod \overline{S_i S_j}^2 \cdot (\prod \sin^2 g a_i)^{n-1} = \prod \sin^2 a_i a_j (gK) (\prod D_i g)^2 \prod R_i g^3.$$

107. Ganz analog wird die entsprechende Formel zwischen dem Producte,  $\prod \sin t_i t_j$ , der Sin. der durch die von  $P$  nach  $k_n \equiv K_m$  gezogenen Tangenten gebildeten Winkel, dem Normalwerthe  $(Pk)$ , den Producten,  $\prod d_i P$ , der Abstände  $P$ 's von den  $d'$  Doppeltangenten  $d_i$  und  $\prod i_i P$ , derjenigen von den  $i$  Wendetangenten  $i_i$  und dem Producte,  $\prod P B_i$ , der Focaldistanzen  $P$ 's:

$$\prod \sin^2 t_i t_i \cdot \prod \overline{P B_i}^{2(m-1)} = \prod \overline{B_i B_j}^2 (Pk) \prod (d_i P)^2 \prod (i_i P)^3.$$

Nur wird es zur Bestimmung der Constante,  $\prod \overline{B_i B_j}$  (das Product der Abstände der reellen Brennpunkte unter einander) nothwendig das  $P$  einmal in  $I$  einmal in  $J$  zu legen und die erhaltenen Grenzgleichungen zu multipliciren, wenn man nicht das Product  $\prod \overline{B_i B_j}^2$  im Systeme aufzunehmen d. h. die Kurve zu variiren bevorzugt. Wählt man also vorläufig  $P$  in einem von  $I$  und  $J$  verschiedenen  $\infty P$  und bemerkt, dass das rechte Glied dann in das Product  $\prod \overline{t_i t_j}^2$  der wechselseitigen Abstände der  $m$  in dieser Richtung gehenden Tangenten übergeht, bekommt man als Corollar, dass die Grösse:

$$\frac{\prod \overline{t_i t_j}^2}{\prod \sin t a_i \prod \sin^2 t d_i \prod \sin^3 t i_i}$$

für jede beliebige Richtung der parallelen  $t$ 's constant ist. Indem man nun jeden Factor des Zählers mit einem Factor des Nenners verbindet, entsteht ein Product mehrerer Strecken, bez. auf den festen Asymptoten, Doppel- und Wendetangenten der Kurve zwischen den parallelen Tangenten abgeschnitten.

Diese Strecken bleiben noch endlich, wenn  $P$  in  $I$  oder  $J$  gelegt wird, was den Uebergang zur endlichen Form der Constante ermittelt. Gleichzeitig bekommt unser Corollar die vollständige Form:

$$\frac{\Pi \overline{t_i t_j}^2}{\Pi \sin t a_i \Pi \sin^2 t d_i \Pi \sin^3 t i_i} = \Pi \overline{B_i B_j}^2$$

unabhängig von der Richtung  $t$ 's.

108. Wenn in den Formeln der beiden letzten Artikel einzelne der Grössen ganz fehlen, z. B. wenn einerseits Doppelpunkte oder Spitzen, anderseits Doppel- oder Wendetangenten fehlen, sind natürlicherweise die bezüglichen Factoren durch *die Einheit* zu ersetzen. — Bei besonderen Kurven sind gewisse der Factorgruppen *identisch Null* oder *unendlich*. Solche werden der Gegenstand specieller Untersuchung. So lehrt uns die erste Formel, dass für eine Kurve mit parabolischem Zweige, unendlich fernen Doppelpunkten oder Spitzen, deren Abstände von endlichen Elementen gleich  $\varepsilon^{-1}$  gesetzt werden, die Sin. der somit verschwindenden Asymptotenwinkel in den betreffenden Fällen gleich resp.  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ ,  $\varepsilon^1$  und  $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$  zu setzen sind. Werden in beiden Gliedern die unendlich Grossen oder Kleinen entfernt und durch endliche Grenzwerthe ersetzt, bekommt man Formeln vom Character der reducirten Normalwerthformeln.

109. Wegen der besonderen Bedeutung derselben und daneben auch zur Anleitung bei weiteren Erweiterungen wollen wir nicht diese Discriminantensätze verlassen, ohne sie auch auf anderem Wege aus einem Paare umfassenderen Sätze abgeleitet zu haben.

Zwei feste Kurven seien  $k_n \equiv K_m$ ,  $k'_n \equiv K'_m$ , eine variable Gerade  $g$ . Man suche das Product  $\prod_{i=1}^{nn'} S_i S_j'$  aller Strecken längs der  $g$  zwischen den Schnittpunkten  $S$  mit  $k$  und  $S'$  mit  $k'$ .



lographe répétiteur. L'émigration aux États-Unis. Le perforateur à air comprimé dans les mines à grison. Descriptions d'une trousse chirurgicale de l'époque de Galien. Un bal à la lumière électrique. Curieux exemple de fontaine intermittente. Sur la physique sans appareils. La pyramide de Meïdoun. La rigidité cadavérique. L'électricité domestique. Migrations des oiseaux. La ligne internationale du Gothard. Balance de précision faite avec une paille. Sur la force de la mâchoire des crocodiles. Observatoire maritime de Hambourg. La photographie microscopique appliqué à la chimie. Le chemin de fer de l'Himalaya. Moteurs à vapeur à grande vitesse : Systèmes Brotherhood et Dolgorouki. Les anticyclones et le maximum barometrique du 17 janvier 1882. Éruption du Mauna-Loa. Les laves du Mauna-Loa. Les Gallinaces hybrides du jardin d'acclimatation. L'exposition d'électricité, et les nominations dans la légion d'honneur. Mirroirs magiques en verre argenté. Nouveau fer météorique. La campagne de dragages du travailleur dans la Méditerranée et dans l'Atlantique, en 1881. Le fourneau électrique. Lampe électrique de m Salignac. L'archipel haïtien et ces volcans. Contrastes entre les couleurs des fleurs et des fruits. Le fusil photographique. Le tunnel transpyrénéen. Henri Giffard. Les obsèques de Henri Giffard. Les compteurs d'électricité. Les détroits artificiels, le canal de Suez. Les théâtres des marionnettes chez les Grecs. Les gastornis assosiation française pour l'avancement des sciences. Expedition française dans les régions centrales. Chemin de fer électrique à accumulateurs. La fabrication des roues de wagons en papier. Utilisation du mouvement de la mer. Charles Robert Darwin. Fabrication des vélocipèdes en Angleterre. Les travaux du port d'Avers. Sur l'amélioration des vins par l'électricité. Les ptérochrozes. Le percement de l'isthme de Corinthe. Etudes préliminaires pour la construction d'un moteur électrique léger. Sensation d'un aveugle. L'acide carbonique de l'air. Extincteur automatique d'incendie. Institut chimique de l'université de Graz. Les grandes dunes du Sahara. Encres pour marquer le linge. Découvertes préhistorique dans le diluvium rhénan en Alsace. L'éclairage électrique des voies publiques. Tissus et bois ininflammables. Force motrice produite dans les bouillères et transportée par l'électricité. Ferments et maladies. Nouveaux tropilleurs russes. Distribution de force motrice à domicile par l'air raréfié. La mer intérieur d'Algérie. Indicateur mécanique de niveau dans les chaudières à vapeur. Les locomotives à air comprimé sur les chemins de fer aériens de New-York. Condensateurs parlant et postes micro-téléphoniques de m. A. Dunand. Transfusion directe du sang vivant. Appareil de photographie instantanée. Le percement de l'isthme de Panama. Conservation de la viande. L'inflexible, cuirassé anglais. La polycarpine et la rage. Système téléphonique de m. Van Rysselberghe. L'injecteur Giffard. Perturbations magnétique et tremblements de terre en Chine. L'électricité domestique. Les téléphones. Une maison de 14 étages à Londres. L'exposition canine au jardin des Tuilleries à Paris. Bibliographie. Correspondance. Chronique. Akad. des sciences. Boîte aux lettres. Recettes utiles. Bulletin météorologique de la semaine.

---



Archiv for Mathematik og Naturvidenskab udkommer med  
1 Bind (4 Hefter) aarlig. Subscriptionsprisen er fastsat til  
8 Kroner pr. Bind.

Syvende Binds tredie Hefte indeholder følgende Afhandlinger:

**Amund Helland.** Om Islands Jøkler og om Jøkelelvenes  
Vandmængde og Slamgehalt.

**Amund Helland** Høidemaalinger fra Island.

**Elling Holst.** Ein Paar synthetische Methoden in der me-  
trischen Geometrie mit Anwendungen.

**Alb. Cammermeyer.**

---

# Archiv

for

## Mathematik og Naturvidenskab

Udgivet

af

Sophus Lie, Worm Müller og G. O. Sars.

---

Syvende Bind. Fjerde Hefte.



Kristiania.

Forlagt af Alb. Cammermeyer.

1882.

## Avertissements.

**La nature.** Revue des sciences et de leur applications aux arts et l'industrie. Journal hebdomadaire illustré. Rédacteur en chef Gaston Tissandier. Pr. pr. Aarg. 26,00. Indh. Traversée de la Manche en ballon. Les Krivosciens, à propos de l'insurrection de la Dalmatie. Sur les trichines dans les salaisons. Comment nous sont parvenus les ouvrages scientifiques de l'antiquité. Installation d'un microphone appliqué aux usages domestiques. Le télégraphe Baudot. Signaux de chemins de fer, appareils à cloches dites allemandes. Régulateur de température fonctionnant sans le secours du gaz de l'éclairage. Les canons de cent tonnes. Attractions et répulsions produites par les vibrations sonores. Objets ethnographiques de l'Asie centrale. Le jabiru du Sénégal. La lumière électrique par incandescence et les accumulateurs. Blanchiment par l'eau oxygénée. Ascenseur continu de m. Frédéric Hart. La rubéfaction naturelle de l'eau. La Boubieda. La photographie du mouvement. Moteur rotatif à grande vitesse de m. Hodson. La roue paradoxale. La scolopendre géante. Le percement de l'isthme de Panama. Marteau-pilon électrique de m. M. Deprez. Les vagues calmées. Vidange pneumatique. Glaciers de la Laponie. Le jardin des plantes de Paris reproduit par la photographie. Horloge à moteur hydropneumatique d. m. Bourdon. Le rôle de Darwin concidéré au point de vue de la paléontologie. Application de la balance d'induction aux recherches sous-marines. Tricycle à vapeur de m. Perreaux. Le tunnel sous la Manche. L'exposition de Bordeaux en 1882. Mouvement perpétuel de Bernouilli. Bec de gaz à incandescence de m. C. Clamond. L'accident des Tuilleries et les dangers de l'éclairage électrique. Les orgues hydrauliques. Les Galibis au jardin d'acclimatation. Utilisation de la chaleur solaire. Le magnéto-parleur. Anémomètre multiplicateur de m. Bourdon. Bibliographie. Necrologie. Correspondance. Chronique. Akad. des sciences. Boîte aux lettres. Recettes utiles. Bulletin météorologique de la semaine.

**Die Natur.** Zeitung zur Verbreitung naturwissenschaftl. Kenntniss u. Naturanschauung für Leser aller Stände. Organ d. „Deutschen Humboldt-Vereins“. Hrsg. v. Dr. Karl Müller, Halle. Pr. pr. Aarg. ugentl. No. Kr. 17,60. Indh. Das Rotations-Gesetz der Planeten. Eine eigenthüml. optische Täuschung. Die Geologie d. Umgegend Tohios, die drei sogenannten Eis-Heiligen. Das grönländische Postwesen. Ueber d. Geruchssinn. Bemerkenswerthe Atolle d. neuesten Aufnahmen. Kosmisch-physikalische Lese-früchte. Allerlei Mystik. Die Lebensmittel-Verfälschung im klassischen Alterthume u. diejenige der Jetztzeit. Ein Blick auf das Gebiet d. astronomischen Literatur. Die Nil-Gans. Ueber d. Vorkommen nutzbarer Mineralien auf Neu Kaledonien. Ein Observatorium zu Nordlicht-Beobachtungen. Unter den Kannibalen auf Borneo. Ein Ausflug nach Tunis. Magnetismus

110. Man denke sich zunächst die Veränderung, welche die Formel erleidet, indem eine Asymptote  $a_i$  sich zum Parallelismus mit einer  $a_i'$  nähert; diese Veränderung tritt offenbar nur im Zähler des rechten Gliedes ein. Wird die ausgezeichnete Asymptotenrichtung  $a_0$  und der Abstand der beiden Parallelen  $\overline{a_0 a_0'}$  genannt, bekommt man den Grenzwert des Productes von dem verschwindenden Factor in  $\prod \sin a_i g_j$  und dem unendlichen in  $\prod F_i g$ :

$$\overline{a_0 a_0'} \sin g a_0 = s \cdot \sin^2 g a_0,$$

wo  $s$  das auf  $g$  zwischen  $a_0$  und  $a_0'$  begrenzte Segment bezeichnet.

Denkt man sich nun die beiden Kurven congruent und dergestalt gelegen, dass die eine nach einer Translation um einer Strecke  $s$  längs der Geraden  $g$  die andere decken wird, bekommt man:

$$\prod_1^{n^2} S_i S_j' = s^n \frac{\prod_1^{n^2-n} \sin a_i a_j \cdot \prod_1^{n^2-n} F_i g \cdot \prod_1^n \sin^2 g a_i}{\prod_1^n \sin^{2(n-1)} g a_i},$$

wo nur endliche Factoren zurückstehen.

Hier bemerkt man, dass das linke Glied offenbar den Factor  $s^n$  enthält, der somit ausgeschieden werden kann. Wenn also die Indexe  $i$  und  $j$  für homologe Punkte gleich sind, hat man:

$$i \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} j, \quad \prod_1^{n(n-1)} S_i S_j' = \frac{\prod_1^{n(n-1)} \sin a_i a_j \cdot \prod_1^{n(n-1)} F_i g}{\prod_1^n \sin^{2(n-1)} g a_i}.$$

Diese Formel gilt unabhängig von der Grösse  $s$ , die sie nicht mehr enthält. Man kann daher  $s = 0$  setzen, o: die Kurven zur Deckung bringen. Es spaltet sich dann das Product

$$\prod_1^{n(n-1)} F_i g,$$

indem von den ursprünglichen  $n(n-1)$  gemeinsamen Punkten  $m$  in diejenigen der Kurve fallen, wo die Tangenten mit  $g$  parallel sind, — das Product solcher Factoren  $F_i g$  ist gleich  $(Kg)$ ;  $2d$  fallen paarweise in die  $d$  Doppelpunkte  $D$  und die übrigen  $3r$  zu dreien in die  $r$  Spitzen. Somit wird man auf die im Art. 106 gefundene Formel geführt.

111. Ganz analog mit dem Raisonement in dem nächsten Art. beweist man die Formel

$$\prod_1^{mm'} \sin t_i t_j' = \prod_1^{mm'} B_i B_j' \frac{\prod_1^{mm'} P f_i}{(\prod_1^m P B_i)^{m'} (\prod_1^{m'} P B_i')^m},$$

wo  $t_i$  und  $t_i'$  bez. die  $m$  und  $m'$  Tangenten von  $P$  nach den beiden Kurven,  $f_i$  die  $mm'$  gemeinsamen Tangenten,  $B_i$  und  $B_i'$  wie früher die Brennpunkte sind. Die Einzelheiten bieten keine besonderen Schwierigkeiten. Die Constante  $\prod_1^{mm'} B_i B_j'$  wird in derselben Weise wie im Art. 107 gezeigt gefunden.

112. Um von dieser Formel aus zur Discriminante des Art. 107 überzugehen, lässt man am einfachsten die Kurven congruent und der Art gestellt sein, dass die eine durch eine Drehung um einen Winkel  $\varphi$  um das Centrum  $P$  herum die andere deckt. Man hat dann, wenn homologe Punkte mit demselben Index versehen werden, im rechten Gliede  $m$  Factoren:

$$B_i B_i' = 2 \cdot P B_i \sin \frac{\varphi}{2} = P B_i \frac{\sin \varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}}$$

und gleichzeitig im linken  $m$  Factoren  $\sin \varphi$ , nämlich alle  $\sin t_i t_i'$ . Man bekommt somit:



$$i > j, \quad \prod_1^{m(m-1)} \sin t_i t'_j = \frac{\prod_1^{m(m-1)} B_i B'_j \cdot \prod_1^{m^2} f_i P}{\cos^m \frac{\varphi}{2} \left( \prod_1^m P B_i \right)^{2m-1}}.$$

Nähert sich hier  $\varphi$  an 0, d. h. lässt man die Kurven zusammenfallen und bemerkt: dass dabei  $m+n$  der  $m^2$  Tangenten  $f_i$  sich mit den Tangenten in den Fusspunkten der von  $P$  aus gezogenen Normalen identificiren, während  $2d'$  paarweise in die Doppeltangenten und die übrigen  $3i$  zu dreien in die Wendetangenten zusammenfallen; dass weiter  $B_i B_j$  paarweise zusammenfallen, wie endlich das Product der  $m+n$  Normallängen gleich  $(kP) \cdot \prod_1^m P B_i$  ist, bekommt man die gesuchte Formel:

$$\prod_1^{\frac{1}{2}m(m-1)} \sin^2 t_i t_j = \frac{(kP) \left( \prod_1^d P \right)^2 \left( \prod_1^i P \right)^3}{\left( \prod_1^m P B_i \right)^{2(m-1)}}.$$

Es mag bemerkt werden, dass die Formeln des letzten Art. auch umgekehrt von den Discriminantformeln abgeleitet werden können, wenn man die gegebene Kurve degeneriren lässt und Bezug auf die Formel, an den Theilkurven angewandt, nimmt. Eine Reihe von Factoren scheiden aus und der Rückstand der Formel enthält die gesuchte Relation.

113.  $\triangle_2 (K' K'' K''')$  und  $\nabla_2 (k' k'' k''')$ . Betrachtet man die Formel im Art. 109, erscheint das Product  $\Pi(F_i g)$  als ein Product aller Normalwerthe der Schnittpunkte  $F_i$  der Kurven in Bezug auf die Gerade  $g$ . Eine natürliche Erweiterung entsteht dann, wenn man  $g$  mit einer dritten Kurve ersetzt und das Product der Normalwerthe derselben  $F_i$  in Bez. auf diese sucht.

Es seien die drei Kurven:

$$k'_{n'} \equiv K'_{m'}, \quad k''_{n''} \equiv K''_{m''}, \quad k'''_{n'''} \equiv K'''_{m'''},$$

die Schnittpunkte der  $k'$  und  $k''$  seien  $F_{12}$  u. s. w.; es gilt dann

$$\prod_1^{n'n''} (F_{12} k''')$$

zu suchen. Diese Grösse verschwindet offenbar allein, wenn die drei Kurven durch denselben Punkt gehen, in welchem Falle auch die beiden entsprechenden Grössen:

$$\prod_1^{n'n'''} (F_{23} k'), \quad \prod_1^{n''n'} (F_{31} k''),$$

verschwinden und zwar als unendlich Kleine derselben Ordnung. Sie ist unendlich, *entweder* wenn  $k'''$  die Kreispunkte enthält  $\circ$ : wenn eins der Producte:

$$\prod_1^{n'n'''} \sin \alpha'_i \alpha''''_j, \quad \prod_1^{n''n'''} \sin \alpha''_i \alpha''''_j,$$

unendlich, *oder* wenn ein Punkt  $F_{12} \equiv \infty P \circ$ : wenn das Product  $\prod_1^{n'n''} \sin \alpha'_i \alpha''_j = 0$  ist. Durch gewöhnliches Raisonnement nebst Betrachtung über die Permutation der Kurven wird man zu den interessanten Relationen geleitet:

$$\begin{aligned} \prod (F_{12} k''') \prod \sin^{n'''} \alpha' \alpha'' &= \prod (F_{23} k') \prod \sin^{n'} \alpha'' \alpha''' = \\ &= \prod (F_{31} k'') \prod \sin^{n''} \alpha''' \alpha'. \end{aligned}$$

Diese gleichwertigen Formen haben die grösste Analogie mit und umfassen  $\nabla_2(abc)$  und mögen

$$\nabla_2(k'k''k''')$$

genannt werden. *Dieselbe drückt durch ihr Verschwinden aus, dass die drei Kurven einen Punkt gemeinsam haben, durch Unendlichkeit, dass eine derselben circulär ist.*

114. Dem entsprechend hat man für das Product der Normalwerthe in Bez. auf  $K'''$  aller gemeinsamen Tangenten  $f_{12}$  der Kurven  $K'$  und  $K''$  u. s. w. in:

$$\begin{aligned} \Pi(f_{12}K''') \Pi(B'_i B''_j)^{m'''} &= \Pi(f_{23}K') \Pi(B'' B''')^{m'} = \\ &= \Pi(f_{31}K'') \Pi(B'''_i B'_j)^{m''} \equiv \Delta_2(K' K'' K''') \end{aligned}$$

einen gemeinsamen Ausdruck, dessen Verschwinden lehrt, dass die drei Kurven eine gemeinsame Tangente besitzen, während die Unendlichkeit bezeugt, dass eine derselben einen parabolischen Zweig hat.

Sowohl letzterer als der vorige Ausdruck geben im Unendlichkeitsfalle zu reducirten Formen Anlass.

Man bemerke, dass die Dimensionen von  $\nabla_2(K' K'' K''')$  und  $\nabla_2(k' k'' k''')$  bez.  $2m' m'' m'''$  und  $n' n'' n'''$  sind; vergl. die Dim. 2 und 1 von  $\Delta_2(ABC)$  und  $\nabla_2(abc)$ .

### 115. Die Berührungsinvariante zweier Kurven.

Darunter ist eine Grösse zu verstehen, welche nur verschwindet, wenn die beiden Kurven einander berühren. Eine solche Grösse ist:

$$\frac{\prod n_i}{\frac{1}{\prod B_i B_j'}} \quad \text{mit } \prod n_i = m m' + m n' + m' n$$

das Product aller gemeinschaftlichen Normalen dividirt durch das Product aller Focaldistanzen von Kurve zu Kurve. Dass sie unendlich ist, bedeutet, dass die eine Kurve circulär.

116. *Krümmungshalbmesser*. Nähert sich im Ausdrucke  $(Pk)$   $P$  an die Kurve, bis die kürzeste Normale gleich  $\varepsilon^1$  wird, dann wird auch der kürzeste Abstand nach einer Geraden  $r_i$  gleich  $\varepsilon^1$ . Legt man durch  $P$  eine Transversale  $r_t$  mit dieser  $r_i$  parallel, geht an der Grenze die Transversale in die Tangente im Kurvenpunkte  $P$  über. Vergleicht man die beiden Formen für  $(Pk)$ , welche man erhält mit Hülfe der Geraden  $r_i$  oder der Segmente  $PS_t$  längs  $r_t$ , bekommt man:

$$(Pk) = \prod_1^n Pr_i = \prod_1^n PS_t \prod_1^n \sin r_t \alpha_i.$$

Man gehe zur Grenze und bemerke, dass der eine verschwindende Factor,  $Pr_i = \varepsilon^1$ , dividirt durch die zwei verschwindenden Factoren  $PS_t$ , deren jeder gleich  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  ist, an der Grenze den Krümmungsdurchmesser  $2\rho$  liefert, wie es die Betrachtung eines Kreises hinreichend erklärt. Somit erhält man:

$$2\rho = \frac{\prod_1^{n-1} Pr_i}{\prod_1^{n-2} PS_t \cdot \prod_1^n \sin t \alpha_i},$$

Andere Ausdrücke werden gefunden, indem man z. B. den Segmentenausdruck längs der Tangente mit demjenigen längs der Normale vergleicht.

117. Analoger Weise kann man vom Ausdrücke  $(Kg)$  ausgehen. Nähert sich  $g$  an die Kurve so, dass kürzester Abstand  $= \varepsilon^1$ , und werden vom Fusspunkte  $P$  dieser Normale auf  $g$  die  $m$  Tangenten gezogen, hat man:

$$(gK) = \prod_1^m C_i g = \prod_1^m PB_i \prod_1^m \sin t_i g.$$

An der Grenze, wenn  $g$   $K$  berührt, ist das Product der beiden  $\sin t_i g$ , deren jeder  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  beträgt, dividirt durch den einen Factor  $C_i g = \varepsilon^1$ , eben der doppelten Krümmung  $\frac{2}{\rho}$  gleich; dies giebt:

$$\frac{2}{\rho} = \frac{\prod_1^{m-2} C_i t}{\prod_1^{m-2} \sin t_i t \prod_1^m PB_i},$$

welche Formel derjenigen des vorigen Art. entspricht.

Das Product dieser beiden giebt eine merkwürdige Formel, die als eine *Konnevidentität* für die Kurve anzusehen ist.

118. Endlich erhält man auf ähnliche Weise von der Formel im Art. 102:

$$2\rho = \frac{\prod_{i=1}^{m+n-1} n_i}{\prod_{i=1}^{n-2} P s_i \prod_{i=1}^m P B_i \prod_{i=1}^n t a_i} = \frac{\prod_{i=1}^{m+n-1} n_i}{\prod_{i=1}^{m-2} t_i \prod_{i=1}^n P a_i},$$

welche Formen sowohl mit einander, als mit den vorigen verbunden zu neuen bemerkbaren Konnexidentitäten Anlass geben.

Auch die Discriminanten in 106 und 107 geben einige weitere Ausdrücke.

119. Die Discriminanten waren metrische Pendante zu zwei der Plücker'schen Formeln. Wenn man das Product  $\prod \rho_i$  der Krümmungshalbmesser in den Contactpunkten der von  $P$  an  $K_m \equiv k_n$  gezogenen Tangenten sucht, begegnet man einer Formel, die als Pendant zur bekannten Gleichung:

$$3(m - n) = i - r$$

erscheint, wo  $i$  und  $r$  die Anzahlen den Wendungen und Spitzen sind.

Weil unser Product nur für focale Tangenten und Spitztangenten  $s_1$  verschwindet und nur für Asymptoten und Wendetangenten  $i_1$  unendlich wird u. s. w., bekommt man das vollständige System:

$$\left(\prod_{i=1}^m \rho_i\right)^\alpha \cdot \left(\prod_{i=1}^m P B_i\right)^\beta \cdot \left(\prod_{i=1}^r P s_i\right)^\gamma \cdot \left(\prod_{i=1}^n P a_i\right)^\delta \cdot \left(\prod_{i=1}^i P i_i\right)^{\varepsilon^2}.$$

Die gewöhnliche Untersuchung der singulären Fälle liefert:

- 1) indem ein Factor  $P B_i = \varepsilon^1$  gesetzt wird:  $\prod_{i=1}^m \rho_i = \varepsilon^3$  (vergl. Art. 90);
- 2) indem  $P$  sich an eine Spitztangente nähert:  $\prod P s_i = \varepsilon^1$ ,  $\prod \rho_i = \varepsilon^1$ ;
- 3) — — — Asymptote —  $\prod P a_i = \varepsilon^1$ ,  $\prod \rho_i = \varepsilon^{-3}$ , (vergl. Art. 90);
- 4) — — — Wendepunkte —  $\prod P i_i = \varepsilon^1$ ,  $\prod \rho_i = \varepsilon^{-1}$ ;
- 5) indem endlich  $P$  ins Unendl. rückt:  $\prod \rho_i = \varepsilon^0$ ,  $\prod P B_i = \varepsilon^{-m}$ ,  
 $\prod P s_i = \varepsilon^{-r}$ ,  $\prod P a_i = \varepsilon^{-n}$ ,  $\prod P i_i = \varepsilon^{-i}$ .



Hieraus gehen hervor die Gleichungen:

$$(1) \quad 3\alpha + \beta = 0$$

$$(2) \quad \alpha + \gamma = 0$$

$$(3) \quad -3\alpha + \delta = 0$$

$$(4) \quad -\alpha + \varrho = 0$$

$$(5) \quad -m\beta - r\gamma - n\delta - i\varrho = 0,$$

woraus:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta : \varrho = 1 : -3 : -1 : 3 : 1.$$

Die Gleichung (5) wird eben mittelst der obigen Plücker'schen Gleichung verificirt.

Man hat somit:

$$\prod_1^m \rho_i = k \frac{(\prod_1^m P B_i)^3 \prod_1^r P s_i}{(\prod_1^m P a_i)^3 \prod_1^r P i_i}.$$

Die Constante ist es mir noch nicht gelungen rein geometrisch zu definiren. — Wird indessen  $P$  ins Unendliche verlegt in der zunächst nicht focalen Richtung  $g$ , hat man den Satz:

$$\prod_1^m \rho_i \frac{\prod_1^n \sin^3 g a_i \prod_1^i \sin g i_i}{\prod_1^r \sin g s_i} = k$$

Wird die letzte Gleichung in der Form:

$$\prod_1^m \rho_i \prod_1^m \sin^3 g g_i \frac{\prod_1^n \sin^3 g a_i \prod_1^i \sin g i_i}{\prod_1^m \sin^3 g g_i \prod_1^r \sin g s_i} = k$$

geschrieben, wo  $g_i$   $m$  willkürliche Richtungen sind, und führt man statt  $g$  einmal  $\infty i$  einmal  $\infty j$  ein, multiplicirt und

Nutzen zieht<sup>o</sup> von dem im Art. 99, VII notirten Hilfssatze, bekommt<sup>r</sup> man:

$$k = \sqrt{\lim_{g=\infty} \left( \prod_{i=1}^m \rho_i \prod_{i=1}^m \sin^3 g g_i \right) \lim_{g_j=\infty} \left( \prod_{i=1}^m \rho_i \prod_{i=1}^m \sin^3 g g_i \right)}.$$

Diese Constante hat die interessante geometrische Bedeutung:

$$(A_i \cdot A_j)^{\frac{1}{2}}$$

wo  $A_i$  und  $A_j$  die Werthe sind, welche  $\prod_{i=1}^m \frac{d^2 y}{dx^2}$  für die Bedingungen:  $\frac{dy}{dx} = i$ , bez.  $\frac{dy}{dx} = -i$ , annimmt.

Was die geometrische Bedeutung betrifft, ist es bemerkenswerth, dass man, wenn die Kurve als *Punktgebilde* betrachtet wird,  $r=0$  setzen darf, weil es dann mit doppelter Bedingung verbunden ist, Spitzen anzunehmen. Eine andere Betrachtung leitet indessen dazu,  $k$  zu den Grössen hinzuzuführen, welche zu behandeln sind, um diejenige Invariante zu suchen, deren Verschwinden einen Doppelpunkt an der Kurve constatirt, mit andern Worten: die *Discriminante der Kurve*.

Nähert sich nämlich die Kurve daran, einen Doppelpunkt zu bekommen, nähert sich gleichzeitig  $\prod_{i=1}^m \rho_i$  an Null. Man denke sich, um dies am einfachsten einzusehen, den Doppelpunkt als isolirten Punkt, um welchen die Kurve, im Begriffe denselben zu enthalten, eine kleine Ovale beschreibt, in deren Punkte die Krümmungshalbmesser somit klein und nach und nach mit der Ovale selbst verschwindend sind.

Die hier genannte Discriminante hat übrigens auch in der Analysis keine befriedigende Form erhalten (s. *Clebsch*, Vorl. bearb. v. *Lindemann* p. 313). Die Beiträge über die Natur derselben, wozu meine Methode geführt hat, sind noch nicht vollständig genug und daher nicht zur Veröffentlichung geeignet.

## VI. Einige Constanten die Theorie des Raumpunktes betreffend.

120. *Normalwerthe.* Ein Kegel  $(\kappa_n) \equiv (k_m)$  hat zur Ordnung  $n$  die Anzahl der Generatricen in einer dem Raumpunkte gehörenden Ebene  $\pi$ , zur Classe  $m$  die Anzahl der durch den Strahl  $g$  gehenden Tangentialebenen.

*Asymptotenebenen*  $\alpha_i$  sollen heissen die  $n$  reellen Ebenen, welche den  $n$  Paaren conjugirter Focalstrahlen eines reellen Kegels enthalten, *Brennstrahlen*  $b_i$  die  $m$  reellen Strahlen, wo die conjugirten Focalebene des Kegels einander paarweise schneiden.

*Der Normalwerth*  $(g\kappa)$  *einer Geraden*  $g$  *heisst das Product von der Grössen,*  $\prod_1^n \sin(s_i g)$  *aller Sin. der Winkel*  $g$ 's *mit den Schnittstrahlen*  $s_i$  *einer durch*  $g$  *gelegten willkürlichen Ebene*  $\pi$ , *und*  $\prod \sin(\pi \alpha_i)$  *aller Sin. der Winkel*  $\pi$ 's *mit den Asymptotenebenen, welches Product constant ist.*

$$(g\kappa) = \prod_1^n \sin(s_i g) \prod_1^n \sin(\pi \alpha_i).$$

Der Beweis analog mit dem entsprechenden für ebene Kurven.

*Der Normalwerth*  $(\pi k)$  *einer Ebene*  $\pi$  *heisst das Product von den Grössen*  $\prod_1^m \sin(\tau \pi)$  *aller Sin. der Winkel*  $\pi$ 's *mit den Tangentialebenen durch einen in*  $\pi$  *willkürlich gewählten Strahl*  $g$ , *und*  $\prod_1^m \sin(g b_i)$  *der Sin. der Winkel*  $g$ 's *mit den Brennstrahlen, welches Product constant ist.*

$$(\pi k) = \prod_1^m \sin(\tau \pi) \cdot \prod_1^m \sin(g b_i).$$

Der Beweis entweder wie früher, oder vermittelt der Lehre von der sphärischen Reciprocität.

121. Als Anwendungen könnte hier eine ähnliche Reihe von Beispielen, wie oben für die ebene, angeführt werden. So, wenn  $\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3$  einem Büschel von Kegeln  $n^{\text{ter}}$  O. durch  $n^2$  gemeinsame Strahlen gehören:

$$\sqrt[n]{\prod_1^{n^2} \sin \alpha_1 \alpha_2} + \sqrt[n]{\prod_1^{n^2} \sin \alpha_2 \alpha_3} + \sqrt[n]{\prod_1^{n^2} \sin \alpha_3 \alpha_1} \equiv 0,$$

weiter, wenn  $k_1 k_2 k_3$  einem Büschel von Kegeln  $m^{\text{ter}}$  Cl.,  $m^2$  gemeinsame Ebenen berührend, analog:

$$\sqrt[m]{\prod_1^{m^2} \sin b_1 b_2} + \sqrt[m]{\prod_1^{m^2} \sin b_2 b_3} + \sqrt[m]{\prod_1^{m^2} \sin b_3 b_1} \equiv 0.$$

Auch den in 106 und 107 angegebenen Discriminantenformeln giebt es analoge für Kegel, welche sich an die für diese geltenden Plücker'sche Formeln schliessen, u. s. w.

122. Am Schlusse dieser hoffentlich hinlänglich reichhaltigen Sammlung theils neuer, theils von neuem Gesichtspunkte aus gesehener Sätze, wodurch häufig früher auf sehr verschiedenen Bereichen gefundene Phänomene als auf's innigste verwandt erscheinen, will ich nur eine kurze Bemerkung hinzufügen.

Der mit dem modern-geometrischen Raisonement vertraute Leser wird in vielen Fällen die Verwandtschaft bemerkt haben, welche zwischen mehreren der von der gegenwärtigen Methoden mitgeführten Untersuchungen und denjenigen, welche den Gegenstand der sogenannten *abzählende Geometrie* bilden, besteht. Der Unterschied ist in der That beinahe nur, dass die gegenwärtige Methode vermittelst der Anzahlen der Lösungen noch Ausdrücke findet für gewisse

Producte von metrischen auf jene Lösungen beruhenden Grössen. Als Beispiele mögen namentlich die den *Plücker'schen* Formeln entsprechenden Productsätze dienen.

---

## Noten.

### I. Ueber Coordinatsysteme im Allgemeinen und speciell über trilineare Coordinaten.

1. Im Anschluss zu den im Texte gezeigten Raisonnements, scheinen bei Betrachtungen über Coordinatsysteme im Allgemeinen gewisse Fragen sich besonders zur Behandlung darzubieten. So kann man die Bedeutung des Falles nennen, dass die Coordinaten 0 oder  $\infty$  sind. Die Betrachtung dessen wird jedenfalls häufig zu interessanten Beobachtungen führen: Im gewöhnlichen Polarsysteme,  $(r, \varphi)$  oder, wie man es für die metrische Geometrie häufig bequemer auffasst,  $(r, \sin \varphi)$ , bezeichnen  $r = 0$  und  $\varphi$  oder  $\sin \varphi = \infty$  *eine und dieselbe Bedingung*, indem sie die Gleichung des mit dem Pole als Centrum beschriebenen Nullkreises abgeben. Im bipolaren Systeme  $(r_1, r_2)$  oder im gewöhnlichen Cartesischen Systeme  $(x, y)$  bezeichnen dagegen  $r_1 = \infty$  und  $r_2 = \infty$  oder  $x = \infty$  und  $y = \infty$  *eine und dieselbe Bedingung*, indem alle diese Gleichungen die unendlich ferne reelle Gerade ausdrücken. Solche Beobachtungen beruhen alle auf die besondere Relationen des betreffenden Coordinatensystems zu den metrischen Singulärelementen  $I$  und  $J$  und deren Verbindungslinie  $\infty r$  in der Ebene, und sind charakteristisch für dieselben Systeme.

2. Die Frage von den Relationen eines Coordinatensystems zu diesen metrischen Singulärelementen der Ebene wird dadurch beantwortet, dass man im betreffenden Systeme die Gleichungen dieser Elemente sucht. Hat man dies für



ein System gefunden, kann man durch gewöhnliche Transformationen das gewonnene Resultat auf andere übertragen. Es werden selbstverständlich zwei gesonderte Gruppen zu behandeln: Punktcoordinaten und Liniecoordinaten.

3. Im gewöhnlichen Cartesischen Systeme ist die Gleichung der  $\infty r$  wie bekannt:

$$\text{eine endliche Constante} = 0.$$

Nach meiner Meinung findet diese bekannte Thatsache seine eigentliche Erklärung darin, dass die Gleichung, »Constante = 0«, als einen geometrischen Ort kennzeichnend, einen solchen bedeutet, dessen Punktcoordinaten Werthe haben, im Vergleich mit welchen jede endliche Constante (z. B. die Einheit) gleich Null ist.

Nach der Bemerkung im vor. Art. bleibt die Gleichungsform in jedem anderen Systeme ungeändert dieselbe:

$$\text{Constante} = 0.$$

4. Im homogenen trilinearen Systeme kann die Gleichung »Constante = 0« bekanntlich so geschrieben werden, dass auch in dieser Gleichung die drei Coordinatsymbole zum Vorschein kommen. Es giebt nämlich eine Gleichung, welche von allen endlichen Elementen der Ebene befriedigt wird und deshalb der Form ist:

$$f(x_1 x_2 x_3) \equiv \text{Constante}.$$

Während in jeder andern Gleichung unendlich ferne Elemente hineingesetzt das eine Glied derselben unendlich machen, wird offenbar für diese Gleichung dieselbe Bedingung *Unbestimmtheit* geben, weshalb

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0$$

eo ipso nur von den unendlichen Elementen befriedigt wird.

Auf Punktcoordinaten  $x_1, x_2, x_3$ , die immer die Abstände

des laufenden Punktes von den Dreiecksseiten  $(abc)$ , mit gewisse Constanten  $(\alpha\beta\gamma)$  multiplicirt, sind, angewandt giebt dies Raisonement für jeden endlichen Werth von  $x_1x_2x_3$  bekanntlich:

$$\frac{ax_1}{\alpha} + \frac{bx_2}{\beta} + \frac{cx_3}{\gamma} = \Delta_2(abc) \quad (1)$$

und somit ist die Gleichung der  $\infty r$ :

$$\frac{ax_1}{\alpha} + \frac{bx_2}{\beta} + \frac{cx_3}{\gamma} = 0. \quad (2)$$

Wenn  $x_1x_2x_3$  die Abstände selbst sind, ist  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ .  
Wenn dagegen:

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c},$$

hat man die Coordinaten von *Lagrange* und *Möbius*. Ich schreibe sie auch:

$$\Delta_2(x_1), \Delta_2(x_2), \Delta_2(x_3).$$

*Umgekehrt* hätte man die Gleichung (2) direct ableiten und daraus wieder (1) schliessen können. Es ist das *hieran entsprechende Raisonement*, das jetzt für Liniecoordinaten durchgeführt werden soll.

5. Man wähle der Einfachheit wegen zur Coordinaten die Abstände selbst  $u_1u_2u_3$  von der laufenden Geraden nach den Ecken des Coordinatendreiecks  $ABC$ , und suche den Ausdruck für die focalen Geraden

$$AI, BI, CI.$$

Man findet dann, indem die Drehung nach einer gewissen Richtung den Kreispunkt  $I$  hervorzuheben gedenkt wird, die Grenzwerte:

$$\text{für } AI: u_1 = 0, \quad \frac{u_2}{ce^{i(\varphi_C - \varphi_A)}} = - \frac{u_3}{be^{i(\varphi_B - \varphi_A)}},$$

$$\text{« } BI: u_2 = 0, \quad \frac{u_3}{ae^{i(\varphi_A - \varphi_B)}} = - \frac{u_1}{ce^{i(\varphi_C - \varphi_B)}},$$

$$\text{« } CI: u_3 = 0, \quad \frac{u_1}{be^{i(\varphi_B - \varphi_C)}} = - \frac{u_2}{ae^{i(\varphi_A - \varphi_C)}}$$

wo  $\varphi_A \varphi_B \varphi_C$  diejenigen Winkel sind, welche die positiven Richtungen der Seiten mit einer gewissen ursprünglichen Richtung  $\varphi$  bilden, und somit  $\varphi_B - \varphi_C = A$  u. s. w.

Dies giebt für den Kreispunkt  $I$  die Gleichung:

$$\frac{u_1}{bc} e^{i\varphi_A} + \frac{u_2}{ca} e^{i\varphi_B} + \frac{u_3}{ab} e^{i\varphi_C} = 0.$$

oder vermittelst:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

und  $\Delta_2(u_1) = u_1 \sin A$ , u. s. w. die Gleichung:

$$\nabla_2(u_1) e^{i\varphi_A} + \nabla_2(u_2) e^{i\varphi_B} + \nabla_2(u_3) e^{i\varphi_C} = 0. \quad (3)$$

In derselben Weise bekommt man für den Kreispunkt  $J$ :

$$\nabla_2(u_1) e^{-i\varphi_A} + \nabla_2(u_2) e^{-i\varphi_B} + \nabla_2(u_3) e^{-i\varphi_C} = 0. \quad (3')$$

Hieraus folgt durch Multiplication die Gleichung des Kreispunktpaares, als Kurve zweiter Classe betrachtet:

$$\begin{aligned} & (\nabla_2(u_1))^2 + (\nabla_2(u_2))^2 + (\nabla_2(u_3))^2 + 2 \nabla_2(u_2) \nabla_2(u_3) \cos A \\ & + 2 \nabla_2(u_3) \nabla_2(u_1) \cos B + 2 \nabla_2(u_1) \nabla_2(u_2) \cos C = 0. \end{aligned}$$

Infolge unseres Raisonnements über die Gleichungen des Ortes unendlich ferner Elemente muss das linke Glied der letzten Gleichung für jede endliche d. h. nicht focale Gerade constant sein. Dies bestätigt auch eine Verification; indem man

nämlich in den linken Gliedern der Gleichungen (3) und (3') Reelles und Imaginäres scheidet, giebt eine Figurbetrachtung für nicht focale ( $u_1 u_2 u_3$ ):

$$\nabla_2(u_1) \cos \varphi_A + \nabla_2(u_2) \cos \varphi_B + \nabla_2(u_3) \cos \varphi_C = \nabla_2(abc) \cos \varphi_u,$$

$$\nabla_2(u_1) \sin \varphi_A + \nabla_2(u_2) \sin \varphi_B + \nabla_2(u_3) \sin \varphi_C = \nabla_2(abc) \sin \varphi_u,$$

woraus durch Quadriren und Summation

$$\begin{aligned} & (\nabla_2(u_1))^2 + (\nabla_2(u_2))^2 + (\nabla_2(u_3))^2 + 2 \nabla_2(u_2) \nabla_2(u_3) \cos A \\ & + 2 \nabla_2(u_3) \nabla_2(u_1) \cos B + 2 \nabla_2(u_1) \nabla_2(u_2) \cos C = (\nabla_2(abc))^2. \end{aligned}$$

6. Die Form der Gleichungen (3) und (3') gestattet den folgenden merkwürdigen Satz auszusprechen:

Wenn man in die Ecken eines Dreiecks Massen anbringt, denjenigen imaginären Grössen gleich, welche die entgegengesetzten Seiten eines ähnlichen Dreiecks in der Gaussischen ( $x + yi$ )-Ebene darstellen würden, ist der Schwerpunkt dieser Massen  $I$  oder  $J$ , je nachdem das letztere Dreieck die eine oder die andere Symmetrielage einnimmt.

7. Eine von einem metrischen Gesichtspunkte aus naheliegende Frage ist die nach einem bequemen trilinearen Coordinatensysteme, worin der Ausdruck:

$$U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3$$

ohne weiters mit dem Abstand ( $Pg$ ) identisch ist.

Nun ist:

$$U_i = \mu_i u_i$$

$$X_i = \nu_i x_i$$

wo  $\mu_i$  und  $\nu_i$  constante Multiplicatoren,  $u_i$  und  $x_i$  die Entfernungen  $g$ 's und  $P$ 's von den Ecken bez. Seiten des Grunddreieckes; man bekommt somit, wenn:

$$\mu_i \nu_i = r_i;$$

$$\begin{aligned} \sum_1^3 U_i X_i &= \sum_1^3 r_i u_i x_i = \sum_1^3 r_i u_i (\sin \varphi_i x - \cos \varphi_i y - p_i) \\ &= x \sum_1^3 r_i u_i \sin \varphi_i - y \sum_1^3 r_i u_i \cos \varphi_i - \sum_1^3 r_i u_i p_i, \end{aligned}$$

indem hier die Dreiecksseiten zu einem ordinären rechtwinkligen Systeme  $xy$  hingeführt sind. Damit nun  $\sum_1^3 U_i X_i$  mit  $(Pg)$  identisch sei, muss der letzte Ausdruck die Hesse'sche Normalform haben, d. h.:

$$\left( \sum_1^3 r_i u_i \sin \varphi_i \right)^2 + \left( \sum_1^3 r_i u_i \cos \varphi_i \right)^2 = 1,$$

oder  $r_i u_i$  muss die folgende Gleichung befriedigen:

$$\sum_1^3 (r_i u_i)^2 + 2 \sum_1^3 (r_i u_i) (r_j u_j) \cos (\varphi_i - \varphi_j) = 1.$$

Diese Gleichung zeigt aber durch einen Vergleich mit dem vor. Art. dass:

$$r_i u_i = \frac{\nabla_2(u_i)}{\nabla_2(abc)},$$

d. h.:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{(Aa)} \\ r_2 &= \frac{1}{(Bb)} \\ r_3 &= \frac{1}{(Cc)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{indem das Grunddreieck} \\ (abc) \equiv (ABC) \\ \text{bezeichnet ist.} \end{array}$$

Man hat somit die folgende Formel:

$$\frac{(lA) (Pa)}{(Aa)} + \frac{(lB) (Pb)}{(Bb)} + \frac{(lC) (Pc)}{(Cc)} = (lP),$$



welche unser Problem löst, und mit der im Texte (Art. 66) besprochenen Gleichung von *Casorati* identisch ist. Führt man übrigens ein:

$$r_i u_i = \frac{\nabla_2(u_i)}{\nabla_2(abc)}$$

hat man zugleich unmittelbar sowohl die in Art. 66 gezeigte  $\nabla_2$ -Gleichung, welche ich auch ursprünglich auf die hier dargestellte Weise gefunden habe, als die dualistische, allerdings bekannte:

$$(lA) \Delta_2(A) + (lB) \Delta_2(B) + (lC) \Delta_2(C) + (lD) \Delta_2(D) \equiv 0.$$

8. Die beiden Gleichungen:

$$(Oa) \nabla_2(a) + (Ob) \nabla_2(b) + (Oc) \nabla_2(c) + (Od) \nabla_2(d) \equiv 0$$

$$(lA) \Delta_2(A) + (lB) \Delta_2(B) + (lC) \Delta_2(C) + (lD) \Delta_2(D) \equiv 0$$

haben besonderes analytisches Interesse, indem sie die metrische Bedeutung derjenigen Constanten  $a_i$  und  $b_i$  abgeben, mit welchen in Punkt- bez. Liniencoordinaten die Grössen  $x_i$  und  $u_i$  zu multipliciren sind um die bekannten Identitäten zu bilden:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 \equiv 0$$

$$b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 + b_4 u_4 \equiv 0.$$

Die Grössen  $a_i$  sind demgemäss den  $\nabla_2(x_i)$  gleich oder mit denselben proportional, ebenso die  $b_i$  den  $\Delta_2(u_i)$ . Beispielsweise ist also:

$$0 = \nabla_2(x_1) \cdot x_1 + \nabla_2(x_2) \cdot x_2 \equiv -(\nabla_2(x_3) \cdot x_3 + \nabla_2(x_4) \cdot x_4),$$

die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte  $(x_1 x_2)$  und  $(x_3 x_4)$  u. s. w. und in Liniencoordinaten analoger Weise.

9. Giebt man in der Gleichung:

$$(Oa) \nabla_2 (a) + (Ob) \nabla_2 (b) + (Oc) \nabla_2 (c) + (Od) \nabla_2 (d) \equiv 0$$

$O$  eine Bewegung nach  $O'$  in einer Richtung  $\varphi$ , die mit  $a_1 b_1 \dots$  die Winkel  $\varphi_a, \varphi_b, \dots$  bilden, und subtrahirt die beiden Gleichungen, bekommt man nach Division durch  $OO'$ :

$$\sin \varphi_a \nabla_2 (a) + \sin \varphi_b \nabla_2 (b) + \sin \varphi_c \nabla_2 c + \sin \varphi_d \nabla_2 (d) \equiv 0.$$

Nach einer Bewegung in die senkrechte Richtung bekommt man einen analogen Ausdruck mit Cos. statt. Sin. Also hat man:

$$\nabla_2 (a) e^{i\varphi_a} + \nabla_2 (b) e^{i\varphi_b} + \nabla_2 (c) e^{i\varphi_c} + \nabla_2 (d) e^{i\varphi_d} \equiv 0,$$

die Gleichungen des Art. 5 dieser Note umfassend. Namentlich lehrt man hieraus:

*Für vier willkürliche Geraden  $abcd$  sind die vier dadurch bestimmten Grössen  $\nabla_2$  mit den Seiten eines geschlossenen Vierseits proportional, dessen Seiten mit  $abcd$  parallel sind (oder nach Belieben: auf dieselben senkrecht stehen).*

Um die Form dieses Vierseits zu bestimmen reicht es hin, z. B. von der Ecke  $M \equiv (ab)$   $MN \perp c$ ,  $d$  in  $N$  schneidend, und  $MO \perp d$ ,  $c$  in  $O$  schneidend, endlich  $NP \perp a$  und  $OP \perp b$  zu ziehen. Dann hat  $MNOP$  die gesuchte Form.

10. Die Behandlung in dieser Note ist etwas detaillirt geworden, weshalb ich mich in Bezug auf Raumcoordinaten darauf beschränke, dass hier ein analoger Zusammenhang stattfindet zwischen meiner Gleichung im Art. 72 und der Casorati'schen in Tetraedercoordinaten, wie in dem Art. 7 dieser Note für die Ebene gezeigt, und dass der Uebergang durch ganz analoge Betrachtungen sich vermitteln lässt.

Weiter sieht man, dass in den Gleichungen:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 \equiv 0$$

$$b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 + b_4 u_4 + b_5 u_5 \equiv 0$$

die Grössen  $a_i$  und  $b_i$  bez. den  $\nabla_3(x_i)$  und  $\Delta_3(u_i)$  gleich oder damit proportional sind.

Das nähere über Raumcoordinaten verschiebe ich für eine spätere Gelegenheit.

## II. Der Nutzen vom Principe I (Art. 1) als geometrisches Hilfsaxiom.

1. Das in Art. 1 genannte Princip I ist ja eigentlich nur der Satz: *Jede algebraische Gleichung besitzt Wurzel.* Als geometrisches Hilfsaxiom angewandt vermag es ohne andern Kalkül nach und nach zu denselben Resultaten zu führen, wie die gewöhnliche, analytische Methode der Coordinaten. Das Continuitätsprincip, von dem es eine specielle Form bildet, ist dabei vorauszusetzen.

Die gegenwärtige Note soll kürzlich eine Anweisung geben, wie die Geometrie der algebraischen Kurven auf diese Weise nach und nach abzuleiten ist von der blossen Definition von Ordnung, Classe u. dgl.

2. Die elementargeometrischen Sätze werden also vorausgesetzt auch für *imaginäre* Elemente zu gelten, z. B. auf die von *Poncelet* gezeigte Weise, so wie die Bedingungen für Verschwinden und Unendlichkeit von den Grundgrössen:

$$P_1 P_2, \quad Pg, \quad \sin(g_1 g_2),$$

wie im Kap. II gezeigt als bekannt vorausgesetzt werden.

Mit diesen Voraussetzungen beweist man zunächst vermittlest der Principien I oder II, dass das Doppelverhältniss durch Projection ungeändert wird, *wie auch die Singulär-*

bedingungen desselben vollständig untersucht werden können; namentlich ist es wichtig zu erkennen, dass ein unendliches Element ( $\infty P$ ,  $\infty i$  oder  $\infty j$ ) nicht einen solchen Fall mitführt. Dann steht der Weg zur Kegelschnittslehre folgendermassen offen:

3. Wenn  $ABCD$  vier feste Punkte einer Kurve 2ter O. sind und  $P$  ein beweglicher Punkt derselben, dann bleibt das Doppelverhältniss:

$$P(ABCD)$$

constant.

Denn, dass es verschwindet, führt nothwendig dazu, dass  $PAC$  oder  $PBD$  auf einer Geraden liegen, was gegen die Definition der Ordnung ist.

Hieraus können bekanntlich alle Kegelschnittseigenschaften nach und nach abgeleitet werden, z. B.:

Es seien  $P$  ein auf  $k_2$  nicht gelegener Punkt,  $A$  und  $B$  die Berührungspunkte zweier der von  $P$  an  $k_2$  zu ziehenden Tangenten, indem die Classe eines  $k_2$  von vornherein als grösser als 1 angenommen werden darf. Eine willkürliche Secante durch  $P$  schneide  $k_2$  in  $C$  und  $D$  und die Gerade  $AB$  in  $Q$ , dann ist:

$$A(ABCD) \equiv A(PQCD)$$

$$B(ABCD) \equiv B(QPCD)$$

d. h.:

$$(PQCD) \equiv (QPCD) = -1$$

oder  $Q$  und  $P$  harmonisch zu  $C$  und  $D$ . Hieraus folgt die Lehre von Pol und Polare. Beiläufig erhält man auch die Classe = 2; wenn nämlich  $A'$  der Contactpunkt einer dritten Tangente durch  $P$  wäre, musste nach dem vorigen  $A'B$  durch  $Q$  gehen o:  $A'AB$  in einer Geraden liegen, was der Ordnungszahl widerspricht.

4. Die Ordnungszahl 2 leitet ebenfalls zu den in Art. 80 angegebenen Ausdrücken für Invarianten, deren Verschwinden

lehrt, dass 6 Punkte bez. Tangenten demselben Kegelschnitte gehören. Um uns auf Punktgebilde zu beschränken, gilt es eine solche Function der Grössen  $\Delta_2(XYZ)$  von den Punkten  $ABCDEF$  gebildet zu bestimmen, dass die Bedingung, in Folge derer drei derselben z. B.  $ABC$  in einer Geraden liegen, die Folgerung mitführt dass: *entweder* 1) die übrigen drei  $DEF$  in einer Geraden liegen, *oder* 2) irgend einer derselben auf einer der Geraden  $AB$ ,  $BC$  oder  $CA$  zu suchen ist; dass umgekehrt eine der Bedingungen 1) oder 2) entsprechende Lagen von  $A$ ,  $B$ ,  $C$  bestimmt. Eine solche Function wird in unendlich vielen Weisen erhalten.

Die Forderungen, dass jede der beiden Glieder, die man hiernach zu bilden hat, jeden Buchstaben zweimal enthalten, und jede  $\Delta_2$  nur in der ersten Potenz vorkommen soll, welche beide daraus hervorgehen, dass die Grösse gleich Null gesetzt die Punkte als einer  $k_2$  gehörend kennzeichnen soll, beschränkt die genannte Unendlichkeit auf Ausdrücke der Form:

$$\Delta_2(ABC) \Delta_2(ADE) \Delta_2(BEF) \Delta_2(CFD) \\ + \lambda \Delta_2(DEF) \Delta_2(BCF) \Delta_2(CAD) \Delta_2(ABE)$$

u. s. w.

Hier giebt dieselbe Bedingung, speciell von der Annahme  $F \equiv A$  befriedigt,

$$\lambda = -1$$

und man hat somit die früher gefundene Grösse:

$$\Delta_2(ABCDEF).$$

5. Dieses Verfahren ist *einer weiteren Generalisation* fähig. Eine Grösse, welche verschwindet, wenn

$$ABCDEFGHIK$$

zehn Punkte einer  $k_3$  sind, muss eine solche dreigliedrige



Form haben, dass, wenn  $ABCD$  auf einer Geraden liegen d. h. z. B.:

$$\Delta_2(ABC) = 0, \quad \Delta_2(BCD) = 0,$$

dann in Folge dessen entweder die übrigen einer  $k_2$  gehören:

$$\Delta_2(EFGHIK) = 0,$$

oder einer derselben der Geraden  $ABCD$ . Hieraus folgt nach analoger Betrachtung wie oben, dass das letzte Glied die Form:

$$\Delta_2(EFGHIK) \Delta_2(EAB) \Delta_2(FBC) \Delta_2(GCD)$$

$$\Delta_2(HDA) \Delta_2(IAC) \Delta_2(KBD)$$

haben muss und die beiden ersteren damit analoge Formen. Man bemerke hier, dass die Anzahl der Punkte  $E, F, \dots K$  eben derjenigen der Geraden  $AB, AC, \dots CD$  gleich ist; hierin ist der Gedanke der Generalisation enthalten.

6. Wenn also im Allgemeinen  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  Punkte auf einer  $k_n$  liegen, muss es einen in diesem Falle verschwindenden Ausdruck geben, welcher speciell verschwindet, sobald von den Punkten  $n+1$  auf einer Geraden und entweder die übrigen  $\frac{n(n+1)}{2}$  auf einer  $k_{n-1}$  liegen oder irgend einer der letzteren auf der genannten Geraden liegt. Der Ausdruck besteht demgemäss von Gliedern, deren jedes das Product einer  $\Delta_2(n-1)$  mit  $\frac{n(n+1)}{2}$  Grössen  $\Delta_2(XYZ)$  ist, welche letztere immer ein Punkt der  $\frac{n(n+1)}{2}$  mit 2 der  $n+1$  zu einem Tripel vereinigen.

---

### III. Die Benennungen »Potenz«, »Normalwerth«, »Index«, m. m.

1. *Steiner* nannte bekanntlich das constante Product  $PS_1 \cdot PS_2$  der Segmente von dem festen Punkte  $P$  längs einer beliebigen Secante bis zu den Schnittpunkten derselben mit einem festen *Kreise*: Die *Potenz* des  $P$  in Bez. auf den Kreis.

Diese Benennung ist allgemein angenommen und mit ihr die Begriffe: Potenzlinie u. s. w.

2. In dem citirten Artikel in *Comptes rendus*, Bd. LX, 70–73, führte *Laguerre* einen Begriff ein, den er, unter Hinweisung zu dem von *Steiner* benutzten Namen, die Potenz (puissance) eines Punktes in Bez. auf eine *Kurve* im Allgemeinen nannte, und den er dadurch näher definirte, dass ein folgender Satz ohne weiterer Bestimmung gelten sollte. Nachdem er nämlich bemerkt hat, dass die Gleichung  $f(xy) = 0$  einer Kurve nur von den Punkten der Kurve befriedigt wird, so dass  $f(\xi\eta)$  für einen anderen Punkt  $M$  positiv oder negativ wird, je nachdem der Punkt der einen oder anderen der beiden Theile gehört, worin die Ebene durch die Kurve getheilt wird, sagt er:

»Wir nennen sie ( $\circ: f(\xi\eta)$ ) die Potenz (puissance) relativ zur Kurve, indem wir uns einer Benennung bedienen, welche schon *Steiner* in Bezug auf den Kreis benützt hat.

»Die Potenz eines Punktes ist bisher nur bis auf eine arbitraire Constante definirt; mit Hülfe folgender Theoreme schliessen wir ihre Bestimmung ab.

»*Theorem I.* Wenn man durch  $M$  einen Kreis legt, ist das Product der Abstände des  $M$  von den  $2n$  Schnittpunkten der Potenz des  $M$  in Bezug auf die Kurve gleich, multiplicirt durch die  $n^{\text{te}}$  Potenz vom Kreishalbmesser . . .«

Es geht aus diesem Satze, dessen Richtigkeit am leichtesten mittelst der gegenwärtigen Methoden geprüft wird, hervor, dass *Laguerre*, indem er den Kreis statt der Geraden als Hülfmittel für Definition gebraucht, in den wichtigsten Fällen mit einem Appendix von 2<sup>n</sup> operiren muss, was man durch eine natürlichere Wahl des Ausgangspunktes vermeidet.

Hiezu kommt noch, dass der *Steiner'sche* Begriff Potenz nicht von dem *Laguerre'schen* umfasst wird, indem der letztere für einen Kreis, wie man leicht sieht, unendlich wird. Im Art. 87 des Textes sieht man die wahre Erweiterung der *Steiner'schen* Potenz, die nämlich nur für rein circuläre Kurven zu bilden ist.

3. Unabhängig, wie erwähnt, von den *Laguerre'schen* Beobachtungen, stellte ich im citirten Art. in *Math. Ann.* Bd. 11, p. 341 den Begriff eines *Normalwerthes* auf, der im Art. 94 des Textes mitgetheilt ist.

»Der *Normalwerth*« unterscheidet sich von der Potenz *Laguerre's* nur durch das Weglassen des genannten Factors 2<sup>n</sup>, welcher alle Formeln für Schnittpunktsysteme nicht circulärer Kurven also eben die allgemeinsten Formeln entstellt.

Sowohl in Folge der letzten Unbequemheit, als weil die Benennung »Potenz«, wie erklärt, heterogenen Begriffen denselben Namen beilegt, habe ich es vorgezogen, meinen Begriff und dessen Benennung beizubehalten.

4. Weniger begründet könnte dies vielleicht scheinen dem von *Faure* eingeführten Begriffe »Index« gegenüber, indem der Index eines Punktes oder einer Geraden in Bez. auf einer Kurve in der That mit meinem »Normalwerthe« identisch ist. Wenn im Texte doch die letztere Bezeichnung durchgeführt ist, ist dies deshalb geschehen: *erstens* weil ich meine Begriffe seiner Zeit in ihrer vollen Allgemeinheit aufstellte,

während, so viel ich weiss, Hrr. Faure ursprünglich und zwar in einer Reihe von Arbeiten seinen Begriff nur für Kurven und Flächen 2<sup>ter</sup> Grades angewandt und erst später als meine Arbeit die Erweiterung ausgeführt hat; dann auch weil der Name *Normalwerth* auf ein mal an die analytische Normalform (Erweiterung der *Hesse'schen*), welche ich im genannten Arbeit nachwies, und an das Normalproduct, welche beide in naher Verbindung damit stehen, erinnert.

5. Endlich muss erwähnt werden, dass die im Art. 94 genannten Geraden  $r_1, r_2, \dots r_n$  mit denjenigen Geraden identisch sind, welche *C. F. E. Björling* »die reciproken Geraden der Brennpunkte« oder die »*F*-Geraden« der Kurve in Bezug auf einen gegebenen Punkt nannte (vergl. Öfvers. af Kongl. Vet.-Akad.s Förh. 1876, p. 17, wo die wichtigsten Eigenschaften der genannten Geraden angegeben sind).

### Berichtigungen.

1. Die Erweiterung des ersten Theoremes im Art. 49 auch für beliebige »auf einer von Focalebenen erzeugten developablen Fläche gelegenen« Kurven zu gelten ist falsch.

2. Durch einen kleinen Rechnungsfehler, der jedoch ohne Einfluss auf den Text ist, sind die beiden Formel im Art. 65 unrichtig geworden. Sie sollen lauten:

$$R P_1 P_2 P_3 \cdot r p_1 p_2 p_3 = a^4 b^4,$$

und:

$$R P^3 \cdot r p^3 = a^4 b^4.$$

Ebenso lautet in Folge dessen die entsprechende Formel in 67:

$$R \sin^3 \Phi \cdot r \sin^3 \varphi = p^2.$$

# BIDRAG

## til de norske kyststrøgs geologi

med kart og profiltavle

af

KARL PETTERSEN.

Den norske kyststræknings anseelige, af større og mindre øer byggede belte, der fra Lofotens sydspidse strækker sig i nordostlig retning, afsluttes paa en vis maade mod nord ved Vandø og Nord-Kvalø i Karlsø præstegjeld. De efter dette øbelte i strøget fra Lofoten nordover til Kvalsund raadende geologiske og orografiske forholde har tidligere været nærmere omhandlede\*). Her skal bygningsforholdene over partiet fra Kvalsund til beltets afslutning nordover søges nærmere fremstillede.

Denne mod nord afsluttende del af beltet indeslutter et temmelig regelmæssigt cirkelformigt omraade af 5 å 6 miles gjennemsnit, (56 å 57 km.) Den dannes af følgende større øer: Ringvatsø, Ribbenesø, Nordre Kvalø, Helgø, Vanø, Renø og desforuden et større antal mindre øer, hvorimellem den lille Karlsø med præstegjeldets kirke. Den forholdsvis

---

\*) Cfr. „Geologiske undersøgelser inden Tromsø amt“. Trondhj. V. S. Skr. 1868. Do. do. 1874. „Lofoten og Vesteraalen“. Archiv for Math. og Naturv. Kristiania. 5 og 6 Bind 1880 og 1881.



største del af dette cirkelformede omraade indtages af den anseelige i flere henseender ret mærkelig byggede Ringvatsø.

Fraregnet enkelte spredte bemærkninger i »Keilhaus Gæa norvegica« 2 Bd. har disse strøg ikke tidligere været nærmere omhandlede i geologisk henseende. Forfatteren har i sommeren 1874 befaret disse øpartier og har senere under forskellige excursionser havt anledning til videre udfyldning af det tidligere indsamlede materiale.

## A. Detail-lagttagelser.

### 1. Ringvatsø

har et fladeindhold af 5,2 n. kv.-mil (= 663 km.\*). I orografisk henseende afviger den i enkelte retninger temmelig stærkt fra flerheden af kyststrækningens øvrige øer. Disse ere nemlig i regelen stærkt udstykkede gennem fjorde og ejder og fjeldpartierne derunder udsondrede i en række af større og mindre helt udskilte øformige partier. Et lignende orografisk grundpræg er visnok at gjenfinde over Ringvatsø, men træder dog i det hele her sammenlignelsesvis kun svagt frem. Langs den vestlige og nordlige del skjær sig saaledes ind forskellige fjorde, men disse ere i regelen ganske korte og afsluttes indad i stejlt stigende dalfører, der snart gaa over i højfjeldsskar eller tabe sig i højfjeldet. Transversale gjenemskjæringer gennem fjordløb, der møde hinanden fra modsat side og alene adskilles ved lavtliggende ejdefar, og som ere saa karakteristiske for flerheden af kyststrækningens øvrige øer, ere ikke at paavise over Ringvatsø.

Fra den vestlige side af øen skjær sig ind den lille

---

\*) O. I. Brochs Aarbog. Kristiania 1871.

Skogsfjord. Denne fortsætter i det lavtliggende Skogsfjordvand, der gennem 1 mils (11,3 km.) længde skyder sig ind i sydøstlig retning indtil foden af Soltindernes høje fjeldrække. I orografisk som i geologisk henseende danner Skogsfjordvand et fremtrædende grændseskjel mellem fjeldpartierne langs efter sammes nordlige og sydlige side. Den sydlige del er et stærkt udpræget bjerglandskab, den nordlige del indeslutter derimod et forholdsvis vidt, af lavere aasdrag gennemsat underland, der først udefter langs de fra nord indskydende smaafjorde stiger op i mere vildt byggede fjeldpartier. Mens landpartiet søndenfor Skogsfjordvandet helt er bygget af grundfjeldets gneisartede lagrækker, optræder over den nordlige halvdel lavere og mere mildtformede landpartier Dividalsfeltets lagrækker i anseelig mægtighed og i forholdsvis vid udbredelse.

Omtrent midt imellem Skogsfjordvandets østre bund og den lille Hersfjord, der skjær sig ind fra Langsund, rejser sig de høje Soltinder. Disse danne den nordligst fremskydende del af et mægtigt vildt bygget fjeldparti, der langs Langsund fortsætter sydover til Kvalsundet og opad afsluttes i en række af mellem 2500 til 3000' (780 à 940 m.) høje toppe. Af disse ligge Soltinderne nordligst, søndenfor disse Skulgamstinderne, hvorimellem de egentlige Skulgamstinder, Rundfjeld og Blaåtind m. fl. Langs Kvalsund vestover aftager fjeldmassen i høide. Et par toppe mellem Kvalsund og Skogfjordsvand naa dog her en høide af noget over 2500'. I den ene af disse nemlig Nonstind naar dette saakaldte Kvalsundets fjelddrag sin største høide med 2747' (882 m.) Længst mod vest afsluttes det i det omkring 2000' høje Graafjeld og den noget lavere Skarsten.

Soltinderne og Skulgamstinderne danne et vildt bygget fjelddrag. Det stiger i regelen steilt op fra Langsund. En række af trange og korte transversale fjelddale skjær sig fra Langsund ind i fjeldmassen. Nordligst saaledes Bjørnskarsdal

med de to Bjørnvande, derpaa Glimdalen med den anseelige ferskvands-sjø Glimma, Røsnesdal med Ringvandet og endelig om Skulgamsgaardene et par længere fjelddale. Bjørndalen og Glimdalen gaa indad over i høitliggende fjeldskar, der gjennemskjær fjeldmassen og fører over til den vestlige side til afhænget ned mod Skogsfjordvandets indre bund. De søndenfor liggende dalfører afsluttes derimod som indad i selve fjeldmassen lukkede botndale. Fra disse trange fjeldspalter stige fjeldvæggene saagodtsom overalt op i stejle og nøgne styrtninger. Paa flere steder flyde ret anseelige gletschere ned efter de mægtigere indskaarne højfjelds-kløfter.

Fjeldmassen langs Kvalsundet indskjæres ved gaarden Simavik af en trang dyb fjelddal, der fører frem i retning fra syd mod nord, men som snart taber sig i det egentlige høifjeld. Længere vestover gjennemskjæres fjeldmassen af Kaarvikdal med det anseelige Kaarvik-vand. Fra dettes indre bund fører et dybere indskaaret fjeldskar frem over til den sydlige side af Skogsfjordvand.

Vidt forskjellig herfra er landets orografiske bygning nordenfor Skogsfjordvandet eller fra dettes nordlige side. Et forholdsvis bredt underland skyder frem langs dette og stiger langsomt op til et omkring 1000' (314 m.) høit liggende aasdrag, der med sine vide højfjeldsmærker fører over til bunden af Daavfjord, Landpartierne mellem Daavfjord og Grundfjord og mellem Grundfjord og Langsund vise en hermed ensartet karakter. Vildere bygget er derimod de længst fremspringende partier langs øens nordvestlige hjørne om bredderne af de smaa fjorde Vægffjord og Fagerffjord. Her stiger den af gneis-granit byggede fjeldmasse op i stejlere styrtninger, uden dog at naa en høide der synderlig overstiger 1000' (314 m.)

Langs det hele Kvalsund bygges fjeldgrunden af typisk gneis i vekslende graa og lysere baandlag. Strøget\*) er overalt temmelig regelmæssigt med svingninger fra  $140^{\circ}$  til  $160^{\circ}$ , faldet altid stejlt nordøstligt. Paa enkelte steder kan dog lagstillinger vise sig mere snoede og forvredne.

Fig. 1. Profil fra Finviken over Graafjeld til Sandsletten i Skarsfjord.

- a. rene gneislag. Strøg  $160^{\circ}$ , fald stejlt n.o. Bergarten indfældt med røde granater.
- b. Bergarten viser sig her mere gneis-granitisk, hvorvel med bestemt fremtrædende gneisartet lagdeling. Gneisen gjennemsættes af forskellige mellem 16 å 32 ctm. mægtige lejeformige dannelser (x) af ren kvarts. Disse kunne følges gennem lange sammenhængende løb op mod Graahejas' top.
- c. Ved Sandsletten igjen rene gneisartede lagrækker, — her tildels i stærkt snoet lagstilling.

Paa nordre side af Skarsfjordbotn typisk graa gneis, strøg  $160'$ , fald  $46'$  n.o.

#### *Indre Kaarvik.*

Gneisartede lag, strøg  $160'$ , fald stejlt n.o. Bergarten gaar her hyppig over til en gneis-granitisk sten, der viser en sribning, der ganske falder sammen med den inden gneisen raadende strøgetning. Gneisen og gneis-graniten vexler tildels med amfibolitiske partier. Ligesom over Graaheja optræder ogsaa her anseelige kvartsudsondringer.

#### *Ytre Kaarvik.*

I de lavere partier ren typisk gneis, tildels i veksel med hornblendskifer. Ogsaa her gaar bergarten højere op over til en mere ensartet tilsyneladende ulaget, i dagen mere hvidlig

---

\*) Strøgetninger aflæses ved en i  $360^{\circ}$  inddelt Boussole. Strøg  $140^{\circ}$  vil saaledes sige, at strøgetningen falder sammen med diameteren gennem  $320^{\circ}$  og  $140^{\circ}$ . Strøgetning  $160^{\circ}$  angiver diameteren gennem  $340^{\circ}$  og  $160^{\circ}$  o. s. v. Samtlige aflæsninger ere retvisende.



sten. Ved nærmere undersøgelse findes bergarten dog at være regelmæssig sribet. Stribningen, der nærmest bestemmes ved glimmerbladernes ordning, er ligeløbende med strøgetningen inden den mere typisk udprægende gneisafdeling.

*Fra Simavik over Tverelv vand til top af Blaatind.*

Fig. 2.

Ved Tverelvns sammenløb med Simavikelv lagrækker af haard gneis i regelmæssig lagstilling. Strøgetning  $140^\circ$ , fald stejlt no.

Op efter det egentlige højfjeld, der stiger frem som et mægtigt kjededrag straks indenom den østre ende af Tverelv-vand ( $760' = 238$  m. o. h.) antager bergarten en mere hvidlig grundfarve. Orthoklasen i Kvalsundets gneis viger tildels pladsen for en hvidlig oligoklas. De i regelen nøgne højfjeldspartier vise ogsaa en stærkt fremtrædende hvidlig grundfarve og danne saaledes en stærk modsætning til gneisafdelingen i de lavere partier med dens mørkere farvenuancer. Forøvrigt optræder denne lysere bergart dog ogsaa her hyppig i veksling med lag af mørkere gneis, der petrografisk staar Kvalsundets glimmergneis nærmere.

Bergarten optræder her ofte udpræget laget, og strøgetningen falder da altid sammen med den, der raader inden Kvalsundets gneisafdeling, nemlig fra  $140$  til  $160^\circ$  med stejlt nordostligt fald. Heraf synes at skulle fremgaa, at den typiske gneis inden de lavere liggende partier og den hvidlige højfjeldsgneis trods den temmelig stærkt fremtrædende petrografiske ulighed dog danne led under en og samme større bygningsgruppe. Men ligesom højfjeldsgneisen paa den ene side staar i overlejningsforhold til den typiske gneis, saa er denne paa den anden side ogsaa præget ved andre særlig fremtrædende ejenommeligheder, saa der dog synes at maatte være grund til at opstille den som en særlig underafdeling inden det store gneisfelt.

Denne hvidlige højfjeldsgneis gennemsesættes eller afveksler



hyppig med en mørk dioritisk bergart, der paa de forskjellige steder kan optræde under temmelig stærkt vekslende strukturforholde, -- snart mere grovkornig, snart temmelig finkornig.

Hr. A. Helland, hvem 3 prøver herfra, hentede fra forskellige niveauer, har været oversendt, har velvillig underkastet disse en nærmere mikroskopisk undersøgelse og udtaler sig derom saaledes:

»Prøve no. 3 er en krystallinisk kornet blanding af større stykker af stærkt dikroitisk *hornblende* som hovedbestanddel, hvortil kommer *plagioklas*, dels med tydelig tvilling-stribning over enkelte partier, dels opfyldte af farveløse mikroliter, saa at stribningen forsvinder. Da disse to mineralier udgjøre hovedbestanddelene, saa bliver bergarten en diorit. Foruden de nævnte mineralier optræder titanit i ikke ringe mængde, nu og da sees magnesiaglimmer samt korn af en jernerts. De to andre tilsendte stykker adskiller sig i mineralogisk henseende ikke væsentlig fra no. 3. Men med hensyn til størrelsen af de krystalliniske korn er der nogen forskjel, idet no. 3 er den mest grovkornede med hornblendekrystaller paa over 1 mm. længde. Hos no. 1 ere krystallerne mindre ca.  $\frac{1}{2}$  mm. lange og hos no. 2 endnu mindre. Men forøvrigt er alle 3 prøver samme diorit med nogen forskjel i struktur.«

Ved punktet *a* — se fig. 2 — i en høide af omkring 1100' (345 m.) o. h. iagttoges det første dioritiske parti. Dioriten optræder her lejeformig i den hvidlige gneis. Strukturen middels kornig. Ovennævnte prøve no 1 er hentet herfra.

Fra punktet *b* opover antager den gneisartede bergart en noget anden karakter og viser sig her tildels mere massiv, idet bænke af massiv sten dog hyppig veksle med lagdelt sten. Indlejninger eller gjennemsætninger af den dioritiske sten bliver her overordentlig hyppige.

Ved punkt (*e*) optræder en 8' (2.5 m.) mægtig gangmasse

af diorit. Denne stryger i omkring n.—s. retning, medens gneisens strøgretning er  $150^\circ$ . Gangmassen skjær saaledes gneisens lagstilling efter strøgretningen under en spids vinkel. Ovennævnte mikroskopisk undersøgte prøve no. 2 er hentet herfra.

Ved punktet *d* — fig. 2 — optræder en bergknaus bygget af paa hinanden følgende lagrækker af i petrografisk henseende stærkt vekslende bergarter. Forholdene her ere nærmere fremstillede i fig. 3.

- a) mørk glimmergneis, 2' (0.6 m.) mægtig,
- b) lys bergart af mere granitisk struktur. Kvarts optræder her temmelig rigeligt,
- c) mørk amfibolitisk, halvt dioritartet bergart, 8' (2.5 m.) mægtig.

Saaledes paa lignende maade langt opover under stadig veksling af lag og bænke med lysere og mørkere sten, — altsaa et rent gneisfelt.

Ved (*e*), fig. 2. Her optræder 50 å 60' (16 å 19 m.) mægtig gang af en middelskornet dioritisk sten. Denne mægtige gangmasse stryger i omkring syd—nordlig retning mellem lagrækker af gneis, der vise en strøgretning af  $150^\circ$ . Ved sin egentlige afslutning udsender denne mægtige gangmasse en 8' (2.5 m.) mægtig forgrening, der skyder sig frem i samme retning som hovedgangen (se fig. 4).

Herfra videre opover optræder i stort tal større og mindre dioritiske partier, ofte i lange sammenhængende drag under en vekslende mægtighed, der ofte kan naa op til omkring hundrede meter. I regelen stryger disse drag i syd—nordlig retning og skjær saaledes de oftest under en strøgretning  $150^\circ$  strygende gneis-skikter under en spids vinkel. Paa sine steder kan dog ogsaa gneisens strøgretning findes ombøiet til omkring syd—nordlig, og de dioritiske gangpartier vil i faa tilfælde gaa over til lejeformige dannelser.

Ved (*f*) — fig. 2 — et temmelig uregelmæssig formet

dioritisk parti. Stenen dannes her af helt overvejende hornblende, medens plagioklasen paa det nærmeste er trængt tilbage. Stenen er stærkt indsprængt med magnetit.

Ved (7) — fig. 2 — stikker frem midt i den lyse, her mere gneis-granitiske sten et 5' (1.6 m.) mægtigt belte af en grønlig, mild, kloritisk glimmerskifer. Strøgetning 140°, fald stejlt no.

Topfladerne ere aldeles overdækkede med løse stene, forherskende bestaaende af en temmelig lys diorit, sammensat af hvidlig plagioklas med sort hornblende i nogenlunde jevn middelskornet forbindelse. Den af Helland undersøgte prøve no. 3 er hentet herfra.

Toppen, omkring 2800' (878 m.) skraaner langsomt ned mod vest, derimod i stejle styrtninger ned til Skulgamdalens øverstliggende botn.

Paa nordre side af denne dal rejser Rundfjeldet sig op til en højde, der naar lidt op over Blaaitindens. Ogsaa her gjennemsættes den hvide gneisartede bergart op efter de nøgne styrtninger mod Skulgamsdalen af forskellige, tildels mægtige partier af den mægtige dioritiske bergart.

Ved Skulgammen ved stranden Kvalsundets gneis, strøg 160° i stejl lagstilling.

Fig. 5. *Profil fra Røsnes op til top af Skulgamstind.*

- a) gneisartede lagrækker. Strøgetning omkring nord—sydlig, fald stejlt til vertikalt. Gneisafdelingen her er i petrografisk henseende nærmest at indordne under Kvalsundets gneis.
- b) I en høide af omkring 1100' o. h. (345 m.) — altsaa i en høide, der paa det nærmeste falder sammen med højden af punktet *a* fig. 2 i profilet opover til Blaaitind, optræder en dioritisk gangmasse, der stryger ligeløbende med gneisens lag og saaledes optræder lejeformet med samme. Denne diorit er i petrografisk henseende ganske at sammenstille med den mørke diorit opefter Blaaitind.

- c) Opper højfjeldet gjennemsættes gneisen, der her er at indorne under Blaåtindens hvidlige højfjeldsgneis, af en graalig dioritisk bergart. Denne, der er ulaget, og som opper mod de egentlige topflader oppræder mere ene-raadende, gjennemsættes igjen af og veksler overordentlig hyppig med tildels svære masser af den mørke dioritiske sten, som tidligere er omhandlet fra profilet opper Blaåtind.

Den nysnævnte lyse diorit, hvoraf prøve har været tilsendt A. v. Lasaulx i Bonn, beskrives saaledes af Weber, der under Lasaulx's tilsyn har underkastet den en mikroskopisk analyse.

»Stenens blandingsdele — plagioklas, hornblende og glimmer —, der tildels have tabt sin naturlige friskhed, oppræder her hyppig i livlig polariserende, epidotlignende aggregater. Epidot oppræder ogsaa selvstændig i talrige blade.«

»Feltspathen danner et pragtfuld blomsterlignende aggregat af smaa lister med talrige epidotblade. Især er det feltspathen, der træder smukt frem i polariseret lys. Kjernen af disse livligt brogede aggregater viser i regelen plagioklasens tvillingstribning. Friskest er dog glimmeren. Denne oppræder i regelen i brune uregelmæssigt begrændsede lister. Den blaalig-grønne hornblende viser næsten aldrig nogen mere regelmæssig begrændsning. Bringes samme i mørke under korsstillede nikoller, saa træder den fremskredne forvitring navnlig frem derved, at livligt polariserende kanter oppræder om hornblendekjernen.

Foruden magnetjernsten oppræder noget kvarts, der tildels synes at være af sekundær oprindelse og at have dannet sig paa sprækker og rifter.

Magnetit oppræder som accessorisk bestanddel i stenen.

Denne noget omvandlede sten synes nærmest at maatte være at bestemme som en diorit.«



Straks i nærheden af pladsen Glimma skjær Glimdalen sig ind i nord—nordvestlig retning. En af løse rullestensblokke bygget vold (morænevold) stiger umiddelbart fra stranden op til en højde af omkring 150' (47 m.) og lukker for dalens udmunding. Det anseelige ferskvand Glimma udfylder paa det nærmeste den nederste og bredeste del af dalen og skyder sig udad frem lige til nysnævnte volds indre kant. Glimmas vandspejl ligger i en højde af 128' (40 m.) over h. Vandet naar en dybde af indtil 20 favne (38 m.) og de dybest liggende partier af sammes bundflade ligger saaledes i en højde, der paa det nærmeste falder sammen med den nuværende havstand. Morænevoldens løse rullestensblokke er oftest skarpkantede, tildels kunne de dog ogsaa være svagt afrundede. De dannes væsentligst af en smuk lys granit. Feltspathen i samme dannes af plagioklas med tildels udpræget tvillingstrikning som forherskende bestanddel ved siden af orthoklos samt vandklar kvarts. Grundmassen er sparsomt indflettet med smaa skjæl af grønlig kloritisk glimmer.

Langs Glimmas østlige langside dannes bergarten saagodtsom udelukkende af en granitisk eller gneisgranitisk bergart, hyppig gennemsat af drag af mørk diorit.

Lidt op i dalen noget ovenfor Glimmas øvre ende aflæstes følgende forhold (se fig. 6).

- a) nede ved elvelejet granitartet sten,
- b) et omkring 120' (38 m.) mægtigt drag af mørk diorit, der stryger i omkring nord—sydlig retning.

En bred dagspalte skiller mellem dioriten og det granitiske parti (c).

Dioriten vil her nærmest være at opfatte som et stokformigt drag i graniten,

Straks indenfor gaarden Bugten — mellem denne gaard og Røsnes — optræder ved stranden et større sammenhængende grønstensparti. Dette dannes af en kornet amfibolit,



i hvilken hornblenden udgjør den næsten helt eneraadende bestanddel. Denne amfibolit findes lidt længere sydover knyttet til gneisgraniten under højst vekslende forholde. Snart gennemses amfiboliten af granitartede aarer, snart optræder omvendt amfiboliten som gangpartier af større eller mindre mægtighed i gneis-graniten. I regelen stryge disse i nord—sydlig retning under stejlt vertikalt fald, og ligger saaledes efter den inden gneisen og gneis-graniten her raadende strøgretning. Etsteds iagttoges et saadant 2' (0.6 m.) mægtigt gangparti, forøvrigt med noget uregelmæssigt formede langsider. Paa andre steder bemærkedes langt mægtigere drag af amfibolit. Grændsen mellem graniten og amfiboliten kan paa sine steder være meget skarp. I enkelte løsrevne blokke — den ene halvdel dannet af granit, den anden af amfibolit — fandtes saaledes disse forskellige bergarter adskilte ved en skarpt tegnet grændselinje. Paa andre steder kan derimod grændseforholdene igjen flyde mere sammen. Etsteds saaes et saadant amfibolitisk parti at stikke frem af graniten, adskilt fra samme ved sahlbaand af ren kvarts.

Denne amfibolit er i petrografisk henseende vel nærmest at betegne som en diorit og staar ogsaa i geologisk henseende utvivlsomt i et nært tilknytningsforhold til den i høifjeldspartierne i saa rigelig maalestok optrædende diorit.

I strøget fra Glimma nordover bestaar Soltindernes vildtbyggede fjelddrag fremdeles af granit eller gneis-granit, i rigt maal gennemsaat af den mørke diorit. Allerede under forbisejling vil man hyppig se mægtige baanddrag af den mørke sten efter de nøgne fjeldvægge, der stige op fra de transversalt indskaarne fjelddale, at gennemsaatte den lysere granitiske sten. Dette forhold fortsætter ganske paa samme maade helt hen til fjelddragets nordlige afslutning ved de høje alpeformige Soltinder, der stiger op fra det lavere underland om Solvandene. Allerede opunder foden af den

nordligste Soltind sees svære gjennebrud af den mørke diorit, ligesom ogsaa lignende gjennebrud stikker frem paa forskellige steder op over de egentlige tinder.

Vi skulle nu fra denne østlige side af øen vende os til sammes vestlige side. Som før nævnt optræder her paa begge sider af Skarsfjord Kvalsundets gneisartede lagrækker, og disse fortsætte herfra videre nordover til indbøjningen mod Skogsfjord. Strøgretningen overalt 140 à 150° med stejlt nordøstligt fald.

Paa nordre side af Skogsfjord ved ytre Skogsfjordgaard graa gneislag, strøg 140°, fald stejlt no.

Ved Gammelgaard gneis i de lavere partier. Opper aaserne afløses gneisen af grønne skiferdannelser.

*Mikkelvik.* Profil herfra opover til bunden af Dyrfjord. Fig. 7.

- a) Hornblendegneis. Strøgretning varierende fra omkring n.—s. til 40°.
- b) rødlig gneis med mellemliggende lag af en mild, mørk, glindsende glimmerskifer med sammenhængende glimmer.
- c) renere granit.
- d) rødlig gneis eller gneis-granit.

Det hele danner saaledes et gneisfelt med overgang til gneis-granit og til mer eller mindre ren granit. Renere granit findes ogsaa indblandet i feltet. Ogsaa indenfor Mikkelvik findes den graa gneis gjennemsat af eller i veksling med rød granitisk sten.

Om bunden af *Dyrfjord* dannes fjeldgrunden af granit, og denne bygger ligeledes højfjeldet mellem Dyrfjord og Fagerfjord. Bergarten er af en graalig farve og nærmest at opfatte som en graa gneis-granit.

Over nes udenfor Mikkelvik stikker rødlig gneis-granit opover de graa og rødlige gneislag, der bygger fjeldgrunden

langs strandpartierne. Gneisen viser overalt steilt østligt fald.

Ved nes ved indbøjning til Fagerfjord stribet gneis-granit. Stribningen stryger o.—v., faldet stejlt s.

*Fagerfjord.* Fjeldhøjden over gaarden bygges af rødlig gneis-granit med stærkt fremtrædende gneisartet struktur, i veksling med renere granit. Anseelige udsondringer af kvarts stikker ofte frem i den granitiske grundmasse.

Ved bunden af Fagerfjord dannes bergarten fremdeles af rødlig gneis-granit.

Fig. 8. Profil over bergryg fra Fagerfjord til Vægford.

a) gneis-granit.

b) tyndlaget hornblendegneis i vertikal lagstilling, nord—sydlig strøgretning.

Langs den vestre side af Vægford haard graa og rødlig tykbænket gneis. Strøgretningen nord—sydlig, lagstillingen vertikal. Gneisen gjennemsættes hyppig af hvide kvartsstriber, indordnede efter lagdelingen. Højere op efter aasdraget veksler gneisen med lagrækker af hornblendeskifer.

Ved *Karanes* laget graa gneis. Strøgretning n.—s., fald stejlt østligt. Lagstillingen er her forøvrigt adskilligt variabel og snoet.

I aasdraget, der stiger op ved Karanes, bryder dioritisk sten frem paa forskellige steder inden gneisafdelingen. Indenfor ytre Karanes bryder en lignende diorit frem lige ved søen. Bergarten er sammensat af en grønlig hornblende med graalig grøn plagioklos. Den træder her oftere frem under prismatiske afsondringer.

Lidt indenfor gaarden Vatnet i den lille dal, der herfra skjær sig ind mod Kjølfield, stikker ligeledes frem et par dioritiske drag, der med sin længdeakse viser en strøgretning af 40°.

Indover langs Daavfjordens vestlige side antager gneisen

en mere granistisk struktur. I dagfladerne er lagdeling ikke at iagttage. At bergarten imidlertid fremdeles er den graa gneis, synes at fremgaa deraf, at de løse fjærestene altid vise en udpræget gneis-struktur, medens brudstykker af mere ren granit ikke vil være at paavise.

Straks søndenfor Vatnet afløses gneisen af lerglimmerskifer i veksling med mild kloritisk skifer. Strøgretningen er her regelmæssig o.—v. med 45° nordligt fald. Lejningsforholdene ere her saaledes bestemt afvigende fra de, der raader inden den tilstødende gneisafdeling. Man er i virkeligheden ogsaa her naaet ind i et yngre skiferfelt, som har en stor udbredelse over disse strøg, og som herfra er at forfølge videre over aasdragene i sammenhæng sydover til Skogsfjordvand.

Den mellem Daavfjord og Grundfjord opstigende aasryg, hvis højeste toppe dannes af Haarskolten og Blaaryggen, omkring 1200' høje, er bygget af lagrækker af gneis med byppig overgang til gneis granit. Ogsaa her gjennemsættes gneisen af forskellige større og mindre dioritiske partier. Et af disse bygger saaledes den egentlige Haarskolt.

I aasdragets sydligste parti afløses gneisen af det nysnævnte yngre skiferfelt med sine milde grønlig kloritiske skifere og lerglimmerskifere. Strøgretning øst—vestlig med nordligt fald.

Henimod bunden af Grundfjord ved sammes vestlige side optræder ved gaarden Havn i dette yngre skiferfelt en lejeformig dannelselse af en særdeles smuk svovlkis noget indblandet med Kvarts. Lejet har en mægtighed af 4 à 6' (1.3—1.9). En fleraarig grubedrift var her i gang for nogle aar tilbage. Dioritiske partier optræde i nærheden.

Fig. 9. Profil fra Skogsfjordvand over til bunden af Daavfjord.

a) om bredderne af vandet grønlig kloritisk haardskifer.  
Strøg o.—v., fald n.



- b) gulhvid kvartsitisk skifer, — tildels gjennemsat af dioritiske partier.
- c) ned mod Daavfjord de før omhandlede lagrækker af mildere lerglimmerskifer i veksling med milde grønlig kloritiske skifere.

Dette over disse strøg saa vidt udbredte yngre skiferfelt maa efter al sandsynlighed være at indordne under det saakaldte Dividalsfelt, og at opstille som ækvivalerende sammes yngste afdeling.

Halvøen mellem Grundfjord og Langsund er for en væsentlig del bygget af lagrækker, der ere at indordne under nysnævnte afdeling under Dividalsfeltet. Dette felt fortsætter sydover til op under foden af Soltinderne.

Lidt søndenfor gaarden Elvenes ved Langsund stikker frem inden lavlandspartierne en knaus bygget af konglomerat. Dette dannes af oftest afrundede brudstykker af grønsten, granit eller gneis-granit, kvartsit, hornblendeskifer og kalksten indfattet i grøligt kloritisk bindemiddel.

Svage strimler af glimmerskifer med kalkstens indlejninger stikker frem paa flere steder langs Langsund. Det indbyrdes lejningsforhold mellem den her optrædende glimmerskifer og de til Dividalsfeltet henhørende lagrækker har der ikke været anledning til nærmere at aflæse.

---

Ringvatsø er i henhold til de her fremlagte aflæsninger bygget af følgende lagdelte grupper — i rækkefølgen nedenunder opad:

- a) Gneis.
- b) Dividalsgruppens yngre afdeling.
- c) Tromsø glimmerskifergruppe.

Af massiver bryder her frem granit samt forskellige større og mindre dioritiske partier.

De forholde, hvorunder disse forskellige bygningsled



træde frem, skal her søges nærmere fremstillede i en mere samlet oversigt.

#### a. Gneisfeltet

optræder eneraadende over øens sydlige hovedparti mellem Kvalsund og Skogsfjordvand og bygger endvidere de nesformige fremspring mellem de efter øens nordlige side indskydende smaa fjorde, — fra det nordvestlige hjørne østover til Grundfjord.

I partiet mellem Kvalsund og Skogsfjordvand dannes bergarten af en gneis, der navnlig inden de lavere liggende niveauer langs Kvalsundet og de indskydende smaa fjorde optræder som en typisk glimmer-gneis tildels med vekslende lag af lysere og mørkere farve og oftest i smukke regelmæssige lagrækker.

Bergartens feltspath-bestanddel dannes udelukkende af orthoklas. Lagenes strøgretning er saagodtsom overalt i landpartiet mellem Kvalsund og Skogsfjordvand regelmæssig 140 å 160°, faldet stejlt nordostligt. Højere op gaar gneisen hyppig over i eller veksler med mer eller mindre tykbænkede lag af en mere granitisk struktur, — under concordant lagstilling. Lag af ren kvarts findes paa flere steder i hyppig veksling med disse gneis-granitiske lag.

Ved øens sydøstlige hjørne afløses den her omhandlede gneisafdeling af en anden gneisserie, bygget af en i petrografisk henseende fra den forrige noget afvigende gneis-type. Denne dannes af en mere hvidlig oligoklas-gneis, idet feltspathen her ved siden af noget orthoklas mere forherskende bestaar af hvidlig oligoklas. Denne oligoklas-gneis optræder fra en højde af 1000' (314 m.) over havfladen opover det sydlige parti af Skulgamstindernes vildt byggede fjelddrag. Allerede i lang frastand sees denne gneis med sin hvide grundfarve, dannende en stærk modsætning til den ovenomhandlede i de lavere liggende niveauer frembrydende mørkere

gneis, at stikke frem over de oftest nøgne udækkede højfjeldspartier. Med hensyn til lagstilling og lejningsforholde danner Skulgamstindens gneis forøvrigt en med den mørkere gneis fortløbende lagrække, idet lagstillingen ikke alene i grændsestrøgene en ganske samstemmende, men fortsætter paa samme maade langt ind efter Skulgamstindernes felt. Faldet er overalt stejlt østligt, og i saa henseende staar altsaa den hvide oligoklas-gneis i overlejningsforhold til den den mørke glimmergneis. I petrografisk henseende synes der saaledes at kunne være nogen grund til at sondre det store gneisfelt her i tvende underafdelinger, nemlig Kvalsundet og Skulgammens gneisafdelinger, af hvilke den første i saa tilfælde er den ældste.

Der er ogsaa et andet forhold, der synes at skulle tale til fordel for det berettigede i en saadan udsondring.

Medens Kvalsundets gneisafdeling med sin typiske gneis og de til samme knyttede overgangsformer af gneis-granit danner et i det store taget temmelig ensartet hele, — enkelte amfibolitiske smaa partier fraregnede, fri for gjennemsætning af fremmede bergarter, — er forholdet inden Skulgamstindernes gneisafdeling i saa henseende helt herfra afvigende. Skulgammens gneis findes nemlig overordentlig hyppig gjennemsat af mer eller mindre mægtige partier af en oftest mørk diorit. Denne stikker her frem i lange baanddrag i mægtighed fra nogle faa til flere hundrede fod. Disse baanddrag træde her frem snart mere lejeformet, snart under en altid dog meget spids vinkel med den inden gneisfeltet raadende strøgetning. Disse, som det synes, mere selvstændigt forekommende dioritiske drag, optræde i regelen i en omkring nord-sydlig strøgetning, medens strøgetningen inden gneisafdelingen i regelen er 140 à 160°. Strøgetningen inden skiferafdelingen viser dog ofte en tilbøjelighed til at slaa om til mere nord-sydlig, og denne træder stærkere og stærkere frem, jo længere man naar nordover. Over høj-

fjeldspartierne om Ringvand er strøgretningen saagodtsom eneraadende nord—sydlig. De dioritiske gangpartier synes saaledes her at gaa over til lejeformige dannelser.

Den her omhandlede diorit dannes af hornblende som den oftest helt forherskende bestanddel med mer eller mindre sparsomt indblandet plagioklas. Bergarten er i regelen af en temmelig smaa-kornet struktur. Inden de højere liggende niveauer viser dioriten sig oftere mere grovkornet, plagioklasen træder stærkere frem og inden de højest liggende fjeldpartier kan man træffe paa udbredte afsondringer, hvor plagioklasen endog danner den stærkest fremtrædende bestanddel.

Idet dioriten her saaledes paa flere steder synes at optræde mere bestemt gangformig, kunne dette vistnok være at opfatte som et vidnesbyrd om bergartens eruptive oprindelse. Forskjellige forholde synes imidlertid i saa henseende ligesaa snart at kunne pege i modsat retning. Lag af en amfibolitisk sten, der petrografisk staar dioriten nær, er oftere at paavise inden gneisafdelingen under forholde, der vidne for, at de oprindelig tilhøre denne. Dioritens oftere bestemt lejeformige optræden mellem gneisens lagrækker og fremforalt den saa overordentlig hyppige fremtræden af dioritiske drag, der ofte kan lade en i uvished, om hvilken af disse bergarter gneisen eller dioriten danner feltets hovedled, ere forholde, der ligesaasnaart kunne tyde hen paa en samtidig og ensartet oprindelse.

Skulgamstindernes oligoklas-gneis gaar ofte over til en gneis-granit. I partierne om Glimma afløses gneisen af en renere granitisk sten. Denne viser en hvid grundfarve, idet feltspathen dannes af en hvid oligoklas ofte med udpræget tvillingstribning.

Stenen er paa sine steder ret rigelig indfældt med smaa blade af magnesia-glimmer, paa andre steder derimod paa det nærmeste glimmerfri, men derimod sparsomt spættet med

et grønlig kloritisk mineral. Af struktur er bergarten snart mere grovkornig, snart smaa-kornig og da oftest mere kvartsrig.

Forholdene efter højfjeldspartierne fra Glimma nordover til Soltinderne har der ikke været anledning til nærmere at undersøge. Det maa saaledes indtil videre henstaa uafgjort, hvorvidt graniten optræder mere eneraadende over disse strøg eller alene som mer eller mindre underordnede partier inden oligoklas-gneisen. Der er dog paa forhåaand nærmest grund til at antage, at graniten her staar i samme forhold til oligoklas-gneisen, som gneis-graniten inden Kvalsundets gneisafdeling til gneisen der.

Ligesom gneisen findes ogsaa graniten efter Skalgams-tindernes drag i stort maal gjennemsat af dioritiske partier.

De nesformede fremspring langs øens nordlige side mellem Skogsfjord og Dyrfjord, mellem Dyrfjord og Fagerfjord, Fagerfjord og Væg-fjord, Væg-fjord og Daavfjord og endelig Daavfjord og Grundfjord er bygget af gneisartede lagrækker, der i petrografisk henseende nærmest er at indordne under Kvalsundets gneis. De dannes her af haard glimmergneis i vekslang med hornblende-skifer og hornblende-gneis og med hyppig overgang til gneis-granit, tildels ogsaa til renere granitisk sten. I fjeldpartierne paa begge sider af Daavfjord findes gneisen hyppig gjennemsat af partier af mørk diorit.

Lagstillingen inden de her omhandlede strøg viser i regelen en omkring nord-sydlig strøgetning med vertikalt fald.

#### b. Dividals-gruppen.

Langs bredderne af Skogsfjordvandet afløses Kvalsundets gneisafdeling af lagrækker af en yngre gruppe, der indtager et forholdsvis ret anseeligt omraade over Ringvats-øens nordlige part. Som det vil sees af profilridset fig. 9, der er op-



trukket fra Skogsfjordvand nordover til bunden af Daavfjord, dannes denne yngre afdeling nedenfra opad af lagrækker af haard grønlig kloritisk skifer, kvartsitisk skifer og endelig lerglimmerskifere i veksling med milde grønne kloritiske skifere. Strøgetningen er overalt regelmæssig øst—vestlig med nordligt fald.

Paa et enkelt sted, nemlig ved gaarden Elvenes ved Langsund, optræder i en fra underlandet fremstikkende knaus et konglomerat, dannet af brudstykker af diorit, granit eller gneis-granit i kvartsit, hornblendegneis og krystallinisk kalksten. Da disse brudstykker ere sammenkittede ved et grønt kloritisk bindemiddel, og paa den anden side ogsaa optræder indenfor omraadet af den her omhandlede gruppe, i hvilken kloritholdige skifere danne et saa stærkt fremtrædende led, kan der vel være al grund til ogsaa at henhøre konglomeratet her som et underled under denne gruppe. Da konglomeratet imidlertid indeholder brudstykker af kalksten, der ikke kan være hentet fra gneisafdelingen eller den her omhandlede gruppes afdelinger, der efter hvad hidtil er iagttaget ganske mangler kalkstensindlejninger, saa maa tiden for konglomeratets dannelse være at henhøre til gruppens afslutningsperiode eller nærmest til overgangstiden mellem denne og Tromsø glimmerskifer-gruppe. Denne sidste gruppe er ogsaa navnlig karakteriseret ved sine hyppige indlejninger af krystallinisk kornig kalksten.

Det her omhandlede skiferfelt synes nærmest at maatte være at indordne under den saakaldte Dividals-gruppe og i saa tilfælde at henhøre til denne gruppes yngste afdeling.

### c. Tromsø glimmerskifer-gruppe.

Lagrækker tilhørende denne over det nordlige Norge saa udbredte bygningsgruppe optræder paa Ringvats-ø alene som smalere striber efter søns nordlige side langs Langsund.



Lagrækkerne inden den her optrædende afdeling bygges af glimmerskifer med kalkstensindlejninger.

I orografisk henseende afviger Ringvats-ø — som tidligere fremholdt — stærkt fra flerheden af kyststrækningens øvrige øer, idet den ganske mangler disse lave ejdedannelser, der saa ofte i forbindelse med de fra modsat side indskydende fjorde helt gennemskjær øernes fjeldmasse. Øens orografiske bygningsforholde vilde imidlertid dog ogsaa i saa henseende være helt forskellige fra de nu raadende, forsaavidt man alene fæstede sig ved de helt af grundfjeldet byggede landstrøg og derunder tænkte sig de under Dividalsgruppen indordnede lagrækker borte. Øens fjeldmasse vilde i saa tilfælde findes udsondret i trende helt udskilte fjeldpartier, nemlig det store hovedparti mellem Skogsfjord-vand og Kvalsund og de tvende mindre partier paa begge sider af Daavfjord. Den bækkenformige indsænkning mellem disse fjeldpartier er da senere bleven udfyldt ved afsættningen af yngre lagrækker og øens nuværende noget særlige orografiske grundpræg altsaa udgaadt som et resultat af disse udfyldninger.

Lejningsforholdene efter øens sydlige hovedparti er til dels afvigende fra de, der raade over de to nordlige partier. Efter det sydlige fjeldparti er strøgretningen saaledes regelmæssig omkring 140 à 160°, faldet stejlt nordostligt. Over de to nordlige partier er strøgretningen derimod nord-sydlig, faldet stejlt til vertikalt. Disse forskellige forholde synes at pege hen paa, at de her omhandlede fjeldpartier ikke kunne i orografisk henseende vær at opfatte som led under et oprindeligt mere sammenhængende hele. Det sydlige hovedparti paa den ene side og de to nordlige smaa partier paa den anden side maa utvivlsomt ogsaa mere oprindeligt have dannet tvende af hinanden uafhængige eller mere selvstændige fjeldlegemer.

De smaa fjorde, der skjær sig ind langs øens vestlige og nordlige side, skyde paa ethvert sted ind efter den der inden gneisafdelingens lagrækker raadende strøgretning, — inden det sydlige hovedparti saaledes fra no. mod so., efter øens nordside derimod fra n. mod s. Skogsfjordvandet breder sig frem langs den nordlige side af det sydlige hovedparti. Vandets længdeaxe ligger ogsaa i en retning, der ganske falder sammen med den over det sydlige hovedparti raadende strøgretning inden gneisefdelingens lagrækker. Skogsfjord-vand og Kvalsund spænder sig saaledes ligeløbende frem paa hver sin side af Kvalsundets fjelddrag og ligeløbende med dettes længdeaxe.

## 2. Ribbenesø

har et fladeindhold af  $0.67 \text{ n. } \square \text{ m.} = 85 \square \text{ km.}$  Til samme er nært knyttede de to mindre øer Andamen og Hersø.

I orografisk henseende er øen stærkt indskaaret ved forskellige bugter og smaa fjorde. Fra nord af skyder Andamfjorden sig indtil det omkring 4 à 5000' (1.5 km.) lange Andamsejde, der med en kulmination af neppe 100' (31 m.) over havfladen fører over til Skagøundet, der skiller mellem Ribbenesø og Ringvatsø. Lidt længere i syd fører Løgsfjordejdet med en kulmination af omkring 200' (63 m.) fra gaarden Finkirken ved Skagøund over til den lille Løgsfjord, der skjær sig ind fra øens vestlige side. Ved Andamfjord og Løgsfjord i forbindelse med de to nysnævnte til sammenknyttede ejder er Ribbenesøen udsondret i tre større mere selvstændige og helt fra hinanden udsondrede fjeldpartier, nemlig Skogsfjorddraget sydligst, Bredviksdraget mellem Løgsfjordejdet og Andamejdet, og Storfjeldets drag, der breder sig frem fra Andamejpets nordlige eller nordvestlige side.

Skogsfjorddraget bygges af tildels stærkt gjennemskaarne

aasdrag. Bredviksdraget, der danner øens egentlige centrale parti, stiger saagodtsom overalt stejlt op fra strandbredden og afsluttes opad i forskellige tinder, hvoraf flere naa op til omkring 2000' (630 m.). Imellem disse er at mærke Helvedestind, — øens højeste punkt. Storfjeldets drag er lavere og naar i Storfjeldet sit højeste punkt, der neppe overstiger 1500' (470 m.).

Ved Finkirken bygges fjeldgrunden af graa gneisartede lag i veksling med rødlig, mere granitartet sten. I denne sidstnævnte optræder hyppig i store udsondringer i indtil 1' (0.3 m.) gennemsnit ren kvarts — sparsomt indsprængt med rødlig orthoklos. I den mere granitisk udprægede afændring optræder kvartsen og orthoklosen i en særdeles storkornet forbindelse, — indbyrdes udsondrede i klumper af indtil 2 à 3 cm.'s gennemsnit.

I nærheden af Finkirken rejser sig et par isolerede houe eller humper, byggede af en overordentlig storkornet kvartsrig granit. Stenen viser sig tildels indfældt med røde granater.

Langs den søndre side af Løgsfjordejdet bygges fjeldgrunden af haarde kvartsrige gneisartede dannelser, der vise en stribningsretning (eller strøgretning) af 160° med stejlt østligt fald.

Langs efter Løgsfjorden lagraækker af gneisartet sten, der træder frem under en smuk regelmæssig veksling af mørkere og lysere lag. Strøgretning 160°, fald 60° ø.

*Engvik.* Fig. 10. Profil over Styriholmen og Engvik.

- a. rene gneislag i vekslende baandfarver. Indeslutte tynde lag af en mere granitartet sten.
- b. Bergarten viser sig af renere granitisk struktur, men den bevarer fremdeles sin lagdeling. Denne granitiske sten indeslutter igjen lag eller baand af rød storkornet granit.

Over hele dette bælte veksler saaledes gneis i regelmæssig lagdeling gjentagne gange med baand af renere granitisk sten. Disse ligger som lag i gneisen og taber sig tildels gennem successive overgange i denne. Undertiden kan dog ogsaa saadanne granitartede partier overskjære gneislagene mere diagonalt.

*Andamsejdet.* Midtvejs paa ejdet stikker frem tyndlaget graa gnejs. Strøgretning  $160^\circ$ , faldet stejlt østligt.

*Ribbenes.* Ved øens nordøstlige hjørne er lagstillingen temmelig variabel. Ved selve Ribbenes optræder saaledes en graa glimmergneis under en strøgretning af  $60^\circ$  og med stejlt sydøstligt fald. Skiferen gennemsesættes af en rødlig granitisk sten, i hvilken feltspathen optræder i store sammenhængende partier. Kvartsen optræder snart som aarer i feltspathen, snart i mere klumpevis fordeling, men snart kan ogsaa disse to hovedbestanddele optræde i en mere jevn fordeling. Etsteds saaes et saadant  $10'$  (3.1 m.) mægtigt granitisk parti ligeformig at stikke frem mellem gneisen.

Lidt nordenfor Ribbenes:

Hornblendeskifer med baandstriber af kvarts, strøg  $30^\circ$ , fald stejlt so.

Ved det nordøstre hjørne af øen:

graa gneis, strøg  $140^\circ$ , fald sv.

Den lille ø Hersø bygges af et enkelt, noget over  $1000'$  (314 m.) højt opstigende aasdrag. Ved den sydlige side af øen optræder hornblendeskifer i veksel med graa kvartsitisk gneisartet sten. Strøgretning  $40^\circ$ , fald  $30^\circ$  so. Over en liden holme i det smale sund mellem Hersø og Ribbenesø stikker frem en hornblendegneis. Strøgretning s.—v. med sydligt fald.

Andammen er en liden, men højt bygget ø, der som en kile skyder ind gennem Andamfjorden. Den østlige side af øen er bygget af lagrækker af gneis, — graa og mørke i regelmæssig veksling. Strøg  $160^\circ$ , fald stejlt sydvestligt

til vertikalt. Derover hornblendegneis ligeledes i smuk regelmæssig lagdeling og i conform lagstilling med den underliggende glimmergneis. I hornblendegneisen hyppige udsondringer af ren kvarts. Klumpeformige partier af en granitartet sten stikker hyppigere frem fra hornblendegneisen.

---

Ribbenesø er saaledes helt bygget af Kvalsundets gneisafdeling. Over den nordlige del af øen er bergarten i regelen haardere og nærmer sig mere gneisgraniten, over den sydlige del af øen dannes den oftere af mildere glimmerrige og kloritiske skifere. Naar undtages et smalt bælte langs øens nordlige hjørne, hvor lagstillingen er temmelig variabel, raader ellers en konstant strøgretning af  $140^{\circ}$  à  $160^{\circ}$ . Faldet er stejlt nordostligt over øens sydlige halvdel, derimod sydvestligt over den nordlige halvdel.

Af ejderne er Andamsejdet indskaaret efter gneislagenes strøgretning, hvorimod Løgsfjordejdet og Løgsfjord ligger efter en retning, der skjær de her optrædende lagrækkers størgretning under en spids vinkel.

### 3. Sandvikø og Risø.

Vestenfor Ribbenesø, adskilt fra samme ved et bredere sund, rejser sig Sandvikø op til en højde af omkring 1300' (400 m.). Øen bygges af et enkelt sammenhængende fjeldparti, der efter den nordlige del stiger op fra havfladen i stejle til vertikale vægge. En større bølgeformig højflade afslutter opad øens nordparti. Her efter øens vestlige og nordvestlige side skjær sig fra havlinjen ind i fjeldmassen forskellige mærkelige spaltelignende dannelser, der efter sit indre løb med en bredde fra 50 à 100' (16 à 31 m.) og med stejle til vertikale langvægge stiger op til højplateauet. Nede mod søen gjenne sættes de saaledes indskaarne fjeld-



masser yderligere af andre transversale udskjæringer, saa fjeldmassen herigjennuem bliver udskaaet i forskjellige mere isoleret liggende pyramideformige toppe. Dette forhold træder end mere udpræget frem over den noget nordenfor liggende ø Sydfuglø, der nordefter afsluttes gennem en række af sagformige tinder.

Efter Sandvikøens sydlige del falder derimod fjeldmassen ned mere langslut.

Sandvikø er helt bygget af gneisartede lagrækker — sorte, mørke og graa skifere, der vise regelmæssig strøgretning af omkring n.—s. med stejlt østligt fald. Ogsaa her veksler den renere gneisartede skifer med eller gaar over til lag af en mere granitisk struktur. Det indbyrdes forhold kan i saa henseende imidlertid træde frem under temmelig afvigende former.

Nede ved søen noget søndenfor gaarden Mjølviken saaes saaledes etsteds de mørke gneisartede lagrækker diagonalt gjennemsat af en 2 fods mægtig gangmasse af rødlig granit, — en grovkornig sten sammensat af rødlig feltspath, kvarts og mørk glimmer. Paa andre steder saaes derimod gangartede partier af renere granitisk sten at afbøies efter gneislagenes strøgretning og her efterhaanden at gaa over i gneisen.

Straks nordenfor Mjølviken optræder over underlandet udbredte og tildels ogsaa mægtige lag af havsand, rig paa skjælrester, tilhørende endnu levende mollusarter. En lignend sand bygger ogsaa bakkehældene her opover til omkring 200' (63 m.) højde, og i en højde af 180' (56 m.) over havet fandtes her enkelte brudstykker af skjæl. At slutte fra de under befaringen gjorde aflæsninger syntes det rimeligst at forudsætte, at de nævnte skjælrester fandtes paa sit mere oprindelige hjemsted. I saa tilfælde vil dette være den største højde, hvortil skjælførende sandlag (recente sandlag) er paavist inden det nordlige Norge. Uden altsaa i saa

henseende at kunne drage bestemte slutninger, har jeg troet ikke at burde undlade her bestemtere at henlede opmærksomheden paa dette forhold, for at det i tilælde senere kan blive nøiagtigere undersøgt.

Noget søndenfor Sandvikø ligger de to smaa øer Sandvær og Risø, der omgives af talrige, op imod 100 smaaøer og holmer.

Den egentlige Risø naar en højde af omkring 280' (88 m.). Den bygges af haarde, gneisartede lag med overgange til gneis-granit og granit. Lagenes strøgretning temmelig regelmæssig omkring 160° med stejlt østligt fald og falder saaledes sammen med den, der raader over Ringvatsø i strøget langs Kvalsund. Dog er der ogsaa paa sine steder, navnlig efter øens sydlige parti, at paavise forskellige stærkere afbøjninger fra dette mere regelmæssige forhold.

Risøens gneis, der efter lagstillingen at dømme kunde danne det underliggende for Kvalsundets gneisafdeligt, synes ogsaa i petrografisk henseende at afvige noget fra denne. Den er saaledes i det hele mere kvartsrig og kan oftere ogsaa optræde som en kvartsitisk temmelig tykbænket sten. Denne afsondring sees oftere spættet med smaa korn af en hvidlig feltspath (antagelig oligoklas), paa andre steder er den indblandet med en rødlig orthoklas, der igjen kan inde slutte korn af den lysere plagioklas. Med tiltagende indblanding af feltspath gaar kvartsiten over til en gneisartet sten. Man har her saaledes et lignende overgangsforhold som det, som paa et andet sted er omhandlet, som raadende over enkelte strøg inden Vesteraalen\*).

Af de talrige smaaøer og holmer, der omgiver Risø mod mod s.v. og n. er Ljøsø en af de største. Den hæver sig op til en højde af 120' (38 m.). Berarten dannes af haard gneisartet sten med hyppig overgang til granitiske afæn-

\*) Cfr. „Lofoten og Vesteraalen“.

dringer. Som saadan optræder paa etsteds en mørk ulaget bergart, i hvilken feltspathen dannes af en graaligsort til sort plageoklas (antagelig oligoklas) med særdeles udpræget tvillingstribning. Gneisens strøgretning omkring n.—s. med stejlt østligt fald.

Ved Sandvær afsluttes Risø-gruppen mod nord. Denne  $\sigma$  dannes af et omkring 120' (38 m.) højt bergdrag, der stejlt stiger op som en smal ryg langs øens vestlige side.

Fra foden af dette skyder et forholdsvis anseeligt myr-dækket underland frem østover. Ved fjæren her er fundet forskellige brudstykker af en graalig, tildels lerholdig fin-kornet kalksten, der utvivlsomt synes at maatte være af en forholdsvis ung oprindelse. Den leder saaledes tanken nærmest hen til Eocæntidens flyschdannelser. Denne kalksten viser hyppige kondritiske aftryk. Idet disse algelignende aftryk med sine afrundede grene gjennewsætter stenen i de forskjelligste retninger, vil der nærmest være grund til at fæste sig ved den af A. G. Nathorst fremholdte forklaring\*) hvorefter disse aftryk ere at tilskrive ormagtige dyrs bevægelser over eller gennem slammet. Antallet af de paaviste brudstykker af denne kalksten er for stort til, at der skulde kunne synes at være grund til at holde paa en forudsætning om, at de kunne være tilførte langvejs fra f. eks. gennem drivis. De maa snarere være at henhøre til et mere nærliggende oprindeligt hjemsted og kunne i saa tilfælde have tilhørt en yngre, maaske endog til tertiærtiden hørende dannelse, der er paa disse brudstykker nær senere sporløst er udslettet.

---

\*) „Om spor af några evertébrerade djur m. v.“ Vet. Ak. Handlingar. Bd. 18.

\*\*) Cfr. „Arctis“. Arch. for Math. og Naturv. VI B.

## 4. Grøtø

har et fladeindhold af 0,14 n. □ mil (17 □ km.), og danner i orografisk henseende et enkelt fjelddrag med tophøjder, der antagelig naa op til omkring 1500' (470 m.).

Aflæsninger af bergbygningsforholdene har der alene været anledning til at foretage langsefter øens sydlige side. Her fandtes den bygget af laget gneis i veksel med partier af mere gneis-granitisk struktur.

Antagelig er hele Grøtø bygget af en saadan graa gneis, der i det hele viser sig noget stærkere gneis-granitisk udpræget end tilfældet forøvrigt er over Kvalsundet og Ribbenes-øens gneisafdelinger, hvorunder Grøtøens gneis er at indordne. Denne graa gneis synes ofte temmelig ulaget, men indeslutter dog hyppig lag af en ofte tyndlaget glimmerrig gneisartet skifer. Kvarts og magnesiaglimmer danner den graa gneises forherskende hovedbestanddele, hvorimod feltspathen i regelen træder mere tilbage. Bergarten er i saa tilfælde temmelig smaa-kornet. Træder Feltspathen stærkere frem, gaar bergarten over til en renere granit.

## 5. Nord-Kvalø

har et fladeindhold af 0.7 n. □ mil (90 □ km.). Ved det lave Nordskarejde, der fører fra Sørskar ved øens nordvestlige side til Nordskar ved dens østlige side, er øens fjeldmasse udskilt i tvende helt udsondrede hoveddele. Disse ere begge høje og bjergfulde. Over den sydlige forholdsvis største del af øen stiger draget op i en række af toppe, hvorimellem Teist-tinden, lille og store Alangen samt Fin-sula. De højeste af disse naa op til antagelig omkring 2000' (630 m.).

Fra den nordlige del af øen, der i det hele er lavere,

stiger Mebura og Rosmaalen op til en højde af mellem 1500 à 2000' (470 à 627 m.)

Til Kval-ø er i orografisk henseende at henføre Musværerne — en gruppe af smaa-øer og holmer ved øens sydvestlige hjørne.

Om Barset ved øens sydside bygges fjeldgrunden i de laveste partier ved stranden af røde og graa gneisartede lag, der vise en strøgetning af  $40^{\circ}$  med  $60^{\circ}$  s.o. fald. Derover ligger en kvartsrig glimmerskifer (med smaaskjællet glimmer) under en strøgetning af o. — v. med  $30^{\circ}$  s. fald.

Nede fra stranden sees tildels svære partier af en mørk antagelig dioritisk sten paa flere steder op efter de nøgne fjeldvægge at bryde frem, gjennemsættende gneisen eller gneis-graniten. Saaledes over Teist-tindens og Barsetfjeldets sydlige afhæng.

Langs efter de lavere partier efter Kvaløens sydside bygges fjeldgrunden overalt af gneis, i vekslende lag af graalig og rødlig sten og derimellem ogsaa lag af en kvartsrig amfibolit.

Ved øens sydvestlige hjørne gneislag under en strøgetning af  $160^{\circ}$  i vertikal lagstilling.

Efter Musvær-sundet

graa haarde gneislag med en overgang til en granitisk sten.

Gneisen er her nærmest at betegne som en gneis-granit, er rig paa orthoklas og optræder med baandformig stribning.

Paa nes tvers ovenfor Gaasværs husebygninger:

gneislag i regelmæssig lagstilling. Strøgetning  $40^{\circ}$ .

Gaasvær er bygget af gneis-granit.

Langs Kvaløens vestlige side i strøget fra Hermansfjord nordover synes bergartens gneis-granitiske struktur mere at tabe sig og afløses af en renere udpræget gneis.

Ved Sørskar ved stranden gneislag, strøgetning  $140^{\circ}$ , fald vertikalt. Højere op bryder frem ulagede partier af en



ualmindelig grovkornig graalig granit. Men denne indeslutter endvidere partier af en ganske ejendommelig granit-artet afændring. Denne dannes af rødlig orthoklas og kvarts, og heri findes endvidere indblandet blade af grønlig kloritisk glimmer. Saavel orthoklasen som kvartsen optræder her ikke som korn, men store samlede masser af flere føds volumen. Den rødlig orthoklas er forøvrigt stærkt forherskende, og kvartsen stikker i det hele frem som indfældinger i samme. I sammenstødspunkterne flyde paa en vis maade kvartsen og feltspathen over i hinanden. Forholdene synes her nærmest at skulle angive, at kvartsen er afsat paa den vaade vej.

Ved Nordskar gneis-granit med indblandet mørk magnesia-glimmer.

Opunder fjeldhøjden Rosmaalen optræder lag af graa gneis-granit i bænkedeling. Strøg 40°, fald 70° s.o. Derfor findes stenen gjennemsat af transversale afsondringsflader.

---

Nord-Kvalø med Grøtø og tilliggende smaaøer er saaledes bygget af gneisartet sten. Bergarten er her dog i det hele langt stærkere krystallinsk udpræget, haardere og af en mere ensartet struktur end Kvalsundets og Ribbenesøens mere typisk udprægede gneis. Renere gneis vil vistnok ogsaa her hyppig være at paavise, men den gneis-granitiske struktur er dog oftest temmelig stærkt forherskende. Overgang til renere granitisk struktur er forøvrigt ogsaa hyppig at træffe. De granitiske afændringer ligge ofte som mere samlede udsondringer i den haarde gneis-granit, i regelen dog knyttet til denne gennem jevne overgange, saa det paa det bestemtteste fremgaar, at man har for sig alene modificerede afændringer under en og samme petrografiske hovedform.

Navnlig er her at mærke den ejendommelige granitiske

afændring ved Sørskar, hvor orthoklasen og kvartsen ikke optræder i kornet forbindelse, men derimod hver for sig i store samlede masser saaledes indbyrdes tilknyttede, at orthoklasen og kvartsen i kontakten synes at flyde over i hinanden.

Ligesom gneisen og gneis-graniten paa Ringvatsø fandtes gjennemsat af talrige større og mindre partier af diorit, saa er det samme ogsaa tilfældet paa Nord-Kvalø. Navnlig vil dette forhold træde frem langs øens sydlige side.

## 6. Helgø

har et fladeindhold af 0,3 n. □ mil (38 □ km.). Den har sin længdeudstrækning fra oso. til vnv. og bygges af et enkelt fjelddrag med tophøjde, der antagelig naa op til omkring 1500' (471 m.).

Paa et par punkter, hvor der har været anledning til at gjøre aflæsninger, fandtes fjeldgrunden dannet af en haard graalig gneis-granit.

## 7. Vanø

har et fladeindhold af 1.9 n. □ mil (238 □ km.). Fra øens nordvestlige side skjær Skibsfjorden sig ind i nord—sydlig retning. Fra bunden af samme skyder Skibsfjorddalen sig videre sydover og gaar over i et 6 å 700' (188 å 220 m) højt fjeldskar, der fører over til øens sydlige side. Fra de indre partier af skibsfjorden fører skibsfjordejdet i sydvestlig retning over til Hamrene ved øens sydvestlige side og længere nord det lave Vannerejde i østvestlig retning tværs over øen. Ved disse to ejder er øens fjeldmasse udskilt i trede helt fra hinanden udsondrede fjeldpartier, nemlig

- a. Vandtindens og Vandkistens tvillingdrag paa begge sider af Skibsfjorddalen. Vandtinden har en højde af 3307' (1037 m.), Vandkisten er noget lavere.
- b. Kvalkjæftens fjelparti, mellem begge ejderne, danner et lavere mildtformet drag, der med sin bølgeformede højflade naar en højde af omkring 1500' (475 m.).
- c. Thorsvaagsdraget, et højt vildthygget fjeldparti, der danner øens nordlige afslutning.

Til Vanø er i orografisk henseende at henhøre de mindre øer Store og Lille Skorø samt Burø — samtlige ved øens østlige side.

Ved Kvalhausen, ved øens sydvestlige hjørne, er berggrunden bygget af en ulaget gneis-granit.

Nede ved stranden bryder dioritiske partier frem i drag efter en strøgetning af 140°. Dioriten er her tildels indfældt med kulsur kalk og indsprængt med pyrit.

Mellem Vandstuen og Vandvaag afløses gneisen og gneisgraniten af yngre dannelser. Disse dannes af en smndsig graa kvartsrig, tildels kloritisk lerskiferartig sten, der veksler med dolomitisk skifer og magnesiakalk i bænke. Magnesiakalken indsprængt med Jernglimmer. Strøget noget variabelt — i regelen med nordligt til nordvestligt fald.

Ved Vandvaag ved stranden optræder partier af dioritisk sten. Denne bergart er snart smaakornet, snart af en midelskornet til grovkornet struktur med hyppige indfældinger af snore af gul epidot. Amund Helland har underkastet denne bergart en mikroskopisk undersøgelse\*). I henhold til denne er plagioklasen i høj grad opfyldt af krystallinske stykker af et vandklart mineral, maaske en begyndende omvandling til et saussuritagtigt aggregat og derhos forekom-

\*) Mikroskopiske undersøgelser af endel bergarter i det nordlige Norge. Tromsø Museums Aarshefter 1. 1878.

mer ofte lapper af smaragdit i plagioklasen. Hornblenden eller smaragditen er dikroitisk, græsgrøn og smaragdgrøn; den viser tydelige hornblende-gjennemgange. Titanjernsten med levkoxen er ofte tilstede og enkelte stykker af titanit optræder deri. Apatitkrystaller optræder hist og her.

Denne diorit bærer ogsaa i det ydre et fra den til gneisafdelingen knyttede diorit paa Ringvats-ø helt afvigende præg.

Ved Kvitnes og nordefter bygges fjeldgrunden af kloritisk urglimmerskifer med indlejninger af magnesia-kalk. I skiferen hyppige indlejninger af kvarts med rødlig feltspath. Faldet sydligt eller nordligt, — med foldninger.

Ved plads nordenfor Kvitnes lag af den samme skifer med indtil 15 ctm. tykke aarer af feltspath.

Ved gaarden Bugten — paa begge sider af samme — finkornig diorit, gjennemsat af aarer og klumper af kvarts, grønlig klorit, kalkspath ligesom ogsaa af lange i forskellige retninger fremskydende striber og aarer af rødlig skapolith. Ogsaa jernglimmer er bemærket. Derover — se fig. 11 — tyndskifrig, grønlig kloritisk lerglimmerskifer i veksel med gulagtig, hvid kvartsitisk skifer.

Dioriten her er i petrografisk henseende ganske ensartet med dioriten ved Vandvaag.

Om Fakken optræder en lignende diorit i store sammenhængende partier. Den sees her indsprængt med kobberkis.

Ved Gjøvik sort lerskiferagtig sten tildels i veksel med mægtige indlejninger af en kvartsitisk med magnesiakalk indfældt bergart.

I strøget fra Gjøvik nordover viser skiferen øst—vestlig strøgetretning med nordligt fald. Bergarten dannes her af en mørk kloritisk lerglimmerskifer indfældt med kalkspath i pletter og knuder.

Ved Viken dukker gneisen igjen frem ved stranden i et



smalere bælte i nærheden af lagrækker tilhørende det yngre skiferfelt. Direkte kontakt er ikke iagttaget.

Dioriten, der her paa sine steder gjennemsætter gneisen, synes i petrografisk henseende at afvige fra den dioritiske sten, der gjennemsætter det yngre skiferfelt og derimod nærmere at falde sammen med Ringvatsøens diorit. Navnlig mangler her ganske de forskellige udsondringer af epidot, kalkspath og skapolith, der ere saa betegnende for den til den yngre skiferafdeling knyttede diorit. Der synes saaledes at skulle være megen sandsynlighed for, at disse saa forskellige dioritiske afændringer ere at henføre til hver sin aldersperiode.

Op under Vandkistens fod efter et profil fra Vandvaag fandtes en gneis-granitisk sten. Selve Vandtinden er — cfr. Gæa II pag. 289 — bygget af den samme bergart. I henhold til Keilhaas beskrivelse dannes den af en finkornig kvarts, en blaalig-graa feltspath, en sort mat glimmer tildels ogsaa af klorit. Den er uskiktet næsten som granit, uagtet glimmerbladene i regelen optræde i indbyrdes parallel fordeling.

Fra underlandet saaes forskellige, tildels svære partier af en mørk bergart — antagelig diorit — i lighed med forholdene paa Ringvatsø og Nord-Kvalø at stikke frem over de nøgne, af den lysere gneis-granit byggede bergvægge.

Ved Viken afsluttes det yngre skiferfelt og gneisen optræder herfra eneraadende nordefter.

Ved Valen, hvor fjeldet stiger op umiddelbart fra stranden, bygges fjeldgrunden af graa gneis, der ved sin mere ensartede struktur bestemt er at udsondre fra Ribbenessøens baandlagede gneis. Her danner den ligesom over Nord-Kvalø som et overgangsled mellem gneis og gneis-granit, og kan i petrografisk henseende efter de vekslende strukturforholde snart være at indordne under den ene, snart under den anden. Opfattes den som en gneis-granitisk afændring,



saa afviger den imidlertid i petrografisk henseende ganske væsentlig fra gneis-graniten langs efter Lofoten, Vesteraalen og Hindø. Denne er nemlig oftest af en mere rødlig grundfarve, den rødlige orthoklas danner ofte en stærk forherkende bestanddel. Van-øens gneisgranit viser derimod en smudsig graalig grundfarve, den er i regelen mere kvartsrig, og ofte synes kvartsen at optræde endog helt forherskende.

Ved Valen er gneisens strøgretning nord-sydlig med vestligt fald.

Lille og Store Skorø ere begge byggede af grovlaget gneis. Strøg  $140^\circ$ , fald svagt s.v. Bergarten er her sammensat af hvidlig feltspath og kvarts med glimmer paa afløsningsfladerne. Granater optræder ogsaa i samme, om end sparsomt.

Fra vestre side af Skibsfjord stiger fjeldpartien Kvalkjæften op til en højde af omkring 1500'. Kvalkjæften er fra fod til top bygget af regelmæssig paa hinanden følgende lagrækker af grønlig glimmerskifer, hvidlig tyndlaget kvartsit, hornblendeskifer i smuk veksling. Efter det hele lagsystem et svagt vestligt fald langs fjeldpartiets østlige side, derimod svagt østligt langs den vestlige side, — altsaa en skaalformig dannelse.

*Fig. 12.* Profil tvertover øen:

- a. nede ved stranden lagrækker af grønne skifere, indfældt med drummer af kalkspath. Skiferen gjenemsættes paa forskellige steder af diorit, hvori snore af epidot. Ved sammenstødet mellem skifer og diorit synes den sidste at gaa over til en fuldkommen tyndlaget grøn skifer.
- b. Et mægtigt sammenhængende dioritisk parti. Denne diorit synes petrografisk at staa de dioritiske afændringer, der gjenemsætte gneisen nærmere.
- c. Kvalkjæftens nysomhandlede skiferafdeling.

Afdelingen a er ganske at sammenstille med den yngre skiferafdeling langs øens sydøstlige hjørne og efter al rimelighed at indordne under den saakaldte Dividals-gruppe. Afdelingen c er antagelig yngre og er maaske snarest at indordne under Tromsø glimmerskifer-gruppe.

Burø bygget af haard graa gneis.

Fjeldpartiet nordenfor Vannerejdet — Thorsvaagdraget — har der ikke været anledning til nærmere at undersøge. At slutte fra forholdene, som de træde frem efter fjeldsiderne mod ejdet ligesom ogsaa fra haandstykker fra forskellige punkter efter kystlinjerne, er dette fjeldparti heltigjennem bygget af graa gneis eller gneis-granit. De orografiske bygningsforholde synes ogsaa allerede paa forhaand at skulle pege derhen.

I Gæa II pag. 304 findes enkelte notitser herfra. Ved Vandnæringer — øens nordligste punkt — træder bergarten frem med ufuldkommen skiferstruktur. Den indeslutter lag af amfibolit (diorit?).

*Fig. 13.* Profil fra stranden opover højfjeldet i nord (fra Vannerejdets nordvestlige punkt):

- a. ved Korsnes grønne skifere i næsten papirtynde lag i veksling med lag af tyndlaget gulhvid kvarsitisk skifer. Strøgretning o.—v., fald 30° n.
- b. den epidotrige diorit, — ogsaa her med rige udsondringer af kalkspath, kvarts og klorit.

I kontakten med skiferen gaar dioriten her — som allerede før nævnt — over til en laget skifer (grønskifer).

Imellem afdelingen (b) og højfjeldet udbreder sig en dækket myrstrækning.

- c. ulaget sten, — graa gneis (gneis-granit).
- d. opover de nøgne bergvægge sees at stikke frem partier af en mørk bergart (antagelig diorit).

*Fig. 14.* Profil fra Vannerejdet (punkt x) langs stranden sydover til Kammen:

- a. de ved Kornes optrædende før omhandlede skiferdannelser i tilknytning til diorit.
- b. kvartsitiske skifere med grønlig-kloritisk glimmer, — ofte i tykbænkede lag. Denne skifer er temmelig krystallinsk udviklet, optager undertiden noget feltspath og kan da paa sine steder erholde et gneisartet (gneis-granitisk) præg.
- c. Hornblendeskiifer, strøg 60°, fald 20° n.v.
- d. tyndlagede grønlig kvartsitiske skifere.
- e. graa ulaget gneis (gneis-granit) stikker her frem efter et større sammenhængende omraade. Bergarten er forøvrigt af en temmelig ren granitisk struktur, og minder i det hele lidet om gneisen.
- f. Hamrene stikke op over underlandet som en større knaus. De dybest liggende partier er bygget af sorte og grønlig milde skifere i veksling med kvartsitiske skifere. Disse overdækkes af den epidotførende diorit, der ogsaa her gjenemsættes af aarer af kvarts og kalkspath, indfældt med kobberkis og jernglimmer. Ogsaa den dioritiske grundmasse findes indsprængt med kobberkis.
- g. ved Kammen ligger skiferen i overlejningsforhold til dioriten.

*Fig. 15.* Profil fra stranden lidt søndenfor Kammen opover Mortenstind:

- a. Et større sammenhængende dioritisk parti.
- b. Kvartsitisk skifer, — ofte gulhvid sandstenagtig — med mægtige indlejninger af magnesia-kalk, indfældt med klumper af ren hvid kvarts. Lagstillingen er her i regelen stærkt presset.
- c. Det herfra opstigende højfjeld er bygget af en graa granitartet bergart. Strukturen inden disse lavere liggende niveauer minder ikke om gneisen. Efter hvad der kunde iagttages fra underlandet, var dog bestemt

lagdeling eller skikning at iagttage over fjeldets højestliggende partier. Faldet var østligt.

---

Paa grund af fjeldpartiernes stærke udstykning bærer Vanøen i orografisk henseende det samme karakteristiske grundpræg, der er saa betegnende for flerheden af øerne inden kyststrækningens store øgruppe. I geologisk henseende er derimod denne ø forholdsvis rigt udpræget.

Vandkisten og Vandtindens mægtige fjeldpartier ere byggede af en graa haard, oftest ulaget gneis, der saaledes kan gaa over til en gneis-granit. Over de egentlige underlandspartier ligesom ogsaa over de til Vanø knyttede smaa-øer, Store og Lille Skorø samt Burø optræder bergarten i regelen med en bestemt udpræget gneis-struktur, opover de stejle fjeldafhæng derimod oftest mere som en gneis-granit. Øens nordligste hovedparti — fjeldmassen nordenfor Vannerejdet — er ligeledes bygget af en lignende graa gneis-granit.

Dette gneisartede grundfjeld gennemses hyppig af dioritiske partier.

Denne graa gneis er temmelig kvartsrig og adskiller sig i petrografisk henseende ganske væsentlig fra gneis-graniten langs efter Lofoten, Vesteraalen og Hindø, hvor den rødlige orthoklas optræder som en stærkt forherskende bestanddel, ligesom bergarten der oftere kan antage en sandstenartet struktur, der aldrig er at paavise over Ringvatsø eller Vanø.

Lavlandspartierne efter øens sydøstlige side og fremdeles kyststranden fra øens vestlige side fra Vannerejdet sydover til Kammen er derimod bygget af lagrækker af sortelerskiferagtige dannelser i veksling med kvartsitisk tyndlaget sten og grønne kloritiske skifere. Til denne afdeling er endvidere langs øens sydlige side i strøget mellem Vandstenen og Vandvaag knyttet lagrækker af en ejendommelig

graa kvartsrig, snart lerskiferagtig, snart kloritisk skifer, der indeslutter partier af en dolomitisk sten i bænke eller tyndere lag.

Strøgetningen inden denne yngre afdeling er temmelig regelmæssig omkring o.—v. med 20 å 30° nordligt fald. Paa sine steder kunne lagrækkerne inden denne afdeling optræde stærkt pressede eller foldede.

Denne afdeling, der antagelig er at sammenstille med Ringvatsøens yngre skiferafdeling, vil saaledes være at indordne under Dividals-gruppen og at henhøre til sammes yngste periode. Der kan maaske være grund til at forudsætte, at Vandstuens skiferafdeling — betegnet ved sine indlejninger af kalksten og magnesia-kalk — danner feltets yngste led.

Vanøens Dividals-gruppe findes overordentlig hyppig gjennemsat af ejendommelige dioritiske dannelser. Epidot optræder som en hyppig indblanding i disse. Stenen er stærkt indfældt med kalkspath og paa sine steder temmelig rigelig indsprængt med kobberkis. Aarer af rødlig skapolit optræder hyppigt gjennemsættende dioriten langs efter søns sydøstlige side.

I kontakten med skiferen gaar dioriten oftere over til en laget grønskifer.

Kvalkjæftens fjeldparti er bygget af lagrækker af tyndlaget kvartsitisk skifer i næsten horisontal lagstilling. Denne optræder her i en mægtighed af opimod 1500' (475 m.) Den er antagelig at henhøre til Tromsø glimmerskifer-gruppens ældre afdeling.

## 8. Karlsø

har et fladeindhold af 0.7 n. □ mil (66 □ km.) Den er sammensat af tvende lave, opimod 400' (125 m.) høje aas-



drag, sammenknyttede ved et lavt af aluvialmasser med skjællag bygget ejde.

I de laveste niveauer — se fig. 16 — ved handelsstedet glindsende glimmerskifer med storskjællet til sammenhængende glimmer. I denne optræder et favnetykt leje af kvarts indfældt med klumper af magnetjernsten. Skiferen er af en grønlig farve og tæt besaaet med granater. Strøgetning 30 å 40° med indtil 30° n.v. fald.

Lidt længere vestover tyndlaget Kalksten. Strøgetning 30 å 40°, fald 30 å 40° n.v.

Ved Klokkergaarden — henimod øens vestpyut — optræder en smuk finkornig marmor

Straks udenfor Klokkergaarden haarde kulstofholdige skiferlag i veksling med sort kalksten. Paa skiferfladerne er stenen overdækket med brunlig glimmer.

Udenom øens vestligste nes findes kalkstenen i dagfladerne rigt gjennemsat med smukke buskformige Tremolithkrystaller i radial stænglige aggregater.

Ved yderste nes lag af hvid finkornig marmor, i dagfladerne til alle retninger gjennemsat af sprækker. Enkelte af lagene eller bænkene vise i dagpartierne en mægtighed af 1.5' (= 0.47 m.) Antagelig ville de nævnte sprækker tabe sig i noget større dybde og i saa tilfælde vil her kunne udhrydes for skulpturen anvendelige blokke af en smuk, sjelden finkornig marmor.

Længere op over aasskraaningerne afløses den hvide finkornige i dagfladerne tremolithrige marmor af sort tyndlaget kalksten med stejlt indtil 60 å 70° nordvestligt fald.

Ved Gjøvikdal, der skjær sig ind fra øens nordvestlige side — straks vestenfor Drauviken — optræder nedenfra opad

- a. en glindsende glimmerskifer af graalig grundfarve. Den sammensættes af kvarts med hvide glimmerskjæl, men er tillige rigt spættet med brunlig sorte glimmerblade.

Stenen tildeles herved et jevnt sortspættet udseende. Skiferen synes at være noget bøjelig og nærmer sig saaledes en Itakolumit;

b. lag af kalksten rigt inflettet med grønlig tremolith;

c. hvid tyndlaget kalksten, strøg 30 à 40°, fald 20° n.v.,

Østenfor Drauviken afbøjes kalkstenens lagstilling mere i øst-vestlig strøgretning med nordligt fald.

Ved Sandviken mørk kalksten gjenneomsat af aarer og striber af hvid kalksten. Lagenes faldvinkel afbøies her til østlig.

I den mørke kalksten sees hyppig partier af melkehvid kalkspath med klumper af klorit og pyrit, ligesom ogsaa af tildels krystallinisk udviklet kvarts. I en højde over havfladen af omkring 5 m. saaes et halvt cylindrisk hul i kalkstenen. Denne grydeformige dannelse havde et gennemsnit af 1.2 m. og en dybde af 1.6 m.

Øens østspidse er bygget af krystallinisk kalksten i vekslende sorte og hvide partier, rigelig indvokset med bundter af stjerneformig tremolith. I den sorte kalksten er tremolithen sort, i den hvide derimod hvid.

Lagenes faldvinkel er her igjen slaaet om til vestlig.

Karlsøens kalksten optræder snart som en tyndlaget skifrig sten, snart mere tykbænket. Hvor det sidste er tilfældet, vil den oftere sees at skyde op i søjleformige partier. Saadanne gjenstaaende søjleformige partier dannes alene af den hvide kalksten, der saaledes i det hele synes at besidde en mindre modstandsevne mod indvirkningen af eroderende og forvitrende kræfter end den sorte kulstofholdige kalksten.

---

Karlsø er saaledes i de laveste niveauer efter øens midte bygget af en grønlig mild glimmerskifer. Over samme ligger lagrækker af krystallinisk kalksten, der saaledes paa det nærmeste bygger øens faste fjeldgrund. Efter den vestlige side af øen kan kalkstenen tildels findes i veksling med

kulstofholdige skifere. Selve kalkstenen dannes af hvid og mørk sten i vekslende partier. Den mørke grundfarve er at henhøre til en indblanding af kulstof. Kalkstenen er stærkt magnesiaholdig.

Karlsøens kalksten er navnlig efter de mod dagfladen liggende partier oftest rigt indvokset med tremolith i buskformige aggregater. I den mørke kalksten er tremolithen altid mørk, rimeligvis af indblandet kulstof, i den hvide kalksten derimod altid af en lys farve.

Karlsøens kalkstensfelt er maaske nærmest at indordne under Tromsø glimmerskifer-gruppe. Den stærke indblanding af kulstof i kalkstenen, ligesom ogsaa de stærkt kulstofholdige skifere, hvormed kalkstenen paa enkelte steder findes i veksel, kunde dog muligens ogsaa pege hen paa, at man her har for sig noget yngre dannelse tilhørende den saakaldte »yngste højfjeldsgruppe«. Forudsætninger til herom at drage bestemte slutninger, foreligge imidlertid ikke for tiden.

## 9. Renø

har et fladeindhold af 1.1 n. □ mil = 140 □ km. Den gennemskjæres ikke af ejdefar, men derimod af tvende dybere indskaarne fjeldskar, Nordskar og Sørskar.

Nordskar gjennemskjær fjeldmassen transversalt og fører fra Langsund lidt nordenfor gaarden Renskar i omtrent lige østlig retning over til gaarden Nordejde ved øens østlige side. Ejddets eller skarets kulminationspunkt ligger i en højde af omkring 4 à 500' (125 à 157 m.) o. h.

Sørskar skjær sig ind fra gaarden Renskar ved Langsund over til gaarden Sørejdet ved øens østlige side. Ogsaa dette skars Kulminationspunkt ligger i en højde af omkring 4 à 500'.

Grøtnesdalen skjær sig fra Sørskaaret i sydlig retning

og munder ud ved øens sydøstlige side ved gaarden Grøtnesbugt.

Ved de her nævnte to skar i forbindelse med Grøtnesdal udskilles øens fjeldmasse i 4 mere selvstændige fjeldpartier, nemlig:

Rensvolddraget nordligst,

Rundfjeldets drag — mellem Nord- og Sørskar,

Kollen østenfor Grøtnesdal og

Renskartindens drag, der bygger øens sydligste del.

Dette sidste drag naar i Renskarstinden sin største højde med omkring 3000' (941 m.) Denne tind danner ogsaa øens højeste top.

Til Renø er i orografisk henseende tilknyttet den lille ø Nipø med et par tilliggende smaa-øer eller holmer, der rejse sig op fra havfladen straks søndenfor øens sydspidse.

*Fig. 17.* Profil over Nipø, Finkroken til Sæterelv.

- a. Nipø bygget af mild lerglimmerskifer. Strøg  $120^{\circ}$ , fald  $30^{\circ}$  n.o.
- b. ved Finkroken mild mørk buklet Lerglimmerskifer, — tildels kulstofholdig med sort streg — veksling med kvartsitisk glimmer-skifer. Efter strandpartierne strøgetretning  $60$  à  $70^{\circ}$  med  $30^{\circ}$  sydøstligt fald, længere op afbøjes faldretningen til nordvestlig.
- c. Krartsitisk skifer, — strøgetretning  $60^{\circ}$ , fald  $30$  à  $45^{\circ}$  n.v. Denne kvartsitiske afdeling optræder her inden et større sammenhængende omraade og er langs strandpartierne og underlandet at følge gennem en længere strækning, byggende lagrækker med smuk regelmæssig lagdeling.
- d. den milde lerglimmerskifer, fald n.v.
- e. lagrækker af kvartsit, — i conform lagstilling med den, der raader inden (d),
- f. smuk grøn kloritisk skifer,
- g. opover fjeldmassen fra nordre side af Sæterelvdal mild lerglimmerskifer i mægtige lagrækker. Disse fortsætte

under konform lagstilling opover de stejle fjeldvægge saalangt øiet kan naa.

Den her omhandlede afdeling er fulgt udover til Grøtnesdal. Fjeldmassen langs den østlige side af denne dal bygges fremdeles af samme skiferafdeling. Ogsaa her optræder den milde bukledede lerglimmerskifer i veksling med forskellige afændringer af kloritisk skifer. Ved siden af grøn skifer, dannet af grøn kloritisk glimmer i store sammenhængende flader, tildels dækkende tynde plader og udsondringer af kvarts, træffes ogsaa en lysere skifer, dannet af kornig kvarts, indflettet i en grundmasse af hvidlig klorit. Denne bergart findes ofte rigt spættet med smaa blade og drummer af mørk til næsten sort glimmer (biotit). Skiferens strøg her o.—v., fald  $30^{\circ}$  n.

Ogsaa langs den sydvestlige side af øen mod Langsundet bygges fjeldgrunden af lerglimmerskifer. Strøg o.—v., fald n.

*Fig. 18.* Profil tvertover øen fra Sørejde i o. til Renskar ved Langsund i vest:

- a. Ved Storejde i de dybest liggende niveauer smuk kvartsitisk skifer. Strøgretning n.—s., fald svagt v.
- b. Lignende kvartsitiske skiferdannelser i de lavest liggende niveauer ved Renskar — her er imidlertid faldet svunget om til østligt.
- c. Glimmerskifer.
- d. Lejeformede dannelser af krystallinisk kornig kalksten, der nede fra skaret sees som et hvidt, svagt, bølgeformigt baand at spænde sig frem langs den stejle fjeldvæg.

Petrografiske forholdene ikke mindre end den afvigende lagstilling synes at vidne for, at man her er naaet frem til en geologisk afdeling, der maa være at holde ud fra den ovenfor omhandlede skiferafdeling i strøget fra Nipø til Grøtnes. Medens denne sidste antages at maatte



være at henføre til Dividalsgruppen, tilhøre derimod de lagrækker, der bygge fjeldgrunden efter profilet fig. 18, Tromsø glimmerskifergruppe. Grændsen mellem disse to afdelinger, der maa være at søge straks søndenfor Sørejdet, har der ikke været anledning til at paavise, og mere direkte aflæsninger men hensyn til disse to afdelingers indbyrdes lejningsforhold foreligger saaledes ikke.

Profil opover fjeldafhænget, lidt nordenfor Renskar:

- a. Glimmerskifer med østligt fald.
- b. Smuk grovkornig kalksten.
- c. Kvartsitiske lag. Kvartsiten er oftest temmelig tyndbænket, optager paa sine steder feltspath og kan saaledes gaa over til en gneis, der tildels kan antage en halvt granitisk struktur.
- d. Glimmerskifer med granater.

Ved Nordejde ved øens østlige side i de laveste niveauer langs strandpartierne:

en finkornig hvid tildels ogsaa blaalig flammet kalksten. Fald vestligt.

Renø er i henhold hertil bygget af tvende større hovedled nemlig nedenfra opad,

1. lagrækker, der ere at indordne under en af Dividalsgruppens yngre afdelinger. Disse bygge øens sydlige hovedparti og dannes af milde lerglimmerskiferagtige lagrækker i veksling med kloritiske og kvartsitiske skifere. Lagstillingen er overalt temmelig ens, — varierende mellem 60° og 70° og o.—v., med svage bølgeformige foldninger, idet faldet, der sjelden overstiger 30°, dels kan være nordligt, dels sydligt.
2. lagrækker tilhørende Tromsø glimmerskifergruppe, dannede af glimmerskifer i veksling med kvartsit og krySTALLINISK kornig kalksten. Den inden afdelingen raa-dende strøgetning er temmelig regelmæssig nord—syd-

lig. Langs øens østlige side er faldet svagt vestligt, langs den vestlige side derimod svagt østligt.

Denne afdeling bygger øens nordlige hovedparti, — i strøget fra Sørskar til øens nordpynt.

## B. Orografisk og geologisk oversigt.

De her omhandlede øpartier begrænde som et samlet hele et temmelig regelmæssigt omraade, der efter det subjektive skønne kan være at opfatte enten som et kvadrat eller som en cirkellignende flade. Kvadratets side eller cirkelfladens gennemsnitslinje har en længde af 5 à 6 mil (56 à 68 km.). De enkelte øers ligesom ogsaa de til samme knyttede feltdrags længdeaxer bøje sig nogenlunde regelmæssigt efter svingningerne af omraadets grændselinjer.

I lighed med det efter kyststrækningens øgrupper saa almindelig raadende forhold er ogsaa her de enkelte øers fjeldmasser udsondrede i forskellige mere eller mindre selvstændigt optrædende fjeldpartier, — dels ved lavtliggende af alluvialdannelser byggede ejder, dels ved højere liggende fjeldgennemskjæringer. Imellem øerne her mangler dog den store Ringvatsø ligesom ogsaa den udenfor gneisfeltet liggende Renø ganske ejdedannelser. Imidlertid er dog ogsaa fjeldmasserne over disse to øer temmelig stærkt udskildte gennem lavere liggende dalformige gennemskjæringer.

Samtlige større øer inden det her omhandlede omraade ere høje og bjergfulde og viser i regelen det samme orografiske grundpræg, der karakteriserer det nordlige Norges kyststrøg i det hele. Paa grund af fjeldmassernes stærke udstykning ere fjelddragene i regelen korte og naa sjelden

op imod 1 mils (11,3 km.) længde. Den store flerhed af disse naa ikke engang paa langt nær en saadan længde. Af de mere samlede fjelddrag er navnlig at fremhæve Skulgamstindernes og Soltindernes omkring  $1\frac{1}{2}$  mil (17 km.) lange kjededrag efter Ringvatsøens østlige side langs Langsund samt endvidere Vantindens og Vankistens fjelddrag over Vanøens sydparti.

Skulgamstindernes fjelddrag er i høj grad vildt udpræget. Det er gjennemskaaret af forskellige dybe tverdaler, der skjær sig ind fra Langsund og som længere ind gaar over i højfjeldsspalter eller skar, der fører over til skogsfjordvandets dybt indskaarne bækken. Opad afslutter fjeldpartiet i en række af opimod 3000' (941 m.) høje toppe og tinder. Nordligst i draget stiger Soltinderne frem, længer i syd de egentlige Skulgamstinder, hvorimellem Ringvatsinden som den højeste naar op til 3094' (971 m.\*). Efter et par af højfjeldsspalterne skyder sig ned mod de tværdaler, der skjær sig ind fra Langsund, ret anseelige isbræer, — de eneste inden det her omhandlede omraade.

Fjeldpartiet, der udfylder den sydlige del af Ringvatsø i partiet mellem Skogsfjordvand og Kvalsund og som mod sydost gaar over i Skulgamstindernes drag, er ved Kaarviksdalen og et fra Skogsfjordvandet i modsat (sydlig) retning indskydende dalføre udskilt i tvende større hovedpartier, et østligt og et vestligt. Fjeldmassen her viser et fra Skulgamstindernes drag afvigende grundpræg. Opad afsluttes de i større, mere bølgeformige højflader, fra hvilke enkelte højere toppe kunne stige frem. I Nonstinderne naar fjeldmassens vestlige afdeling sin største højde med 2747' (882 m.\*\*).

Langs den nordlige del af Ringvatsøen skyder op et

---

\*) Efter meddelelse fra det geografiske opmaalingskontor.

\*\*) Meddelt af opmaalingskontoret.

par mindre af gneis og gneis-granit byggede fjeldpartier, — det ene mellem Skogsfjord og Daavfjord, det andet mellem Daavfjord og Grundfjord. Disse fjeldpartier, der danne øens nordligste fremspring, ere forholdsvis lave og naa med sine højeste rygge eller toppe neppe over 1200' (376 m.)

Ringvatsø er paa grund af sit forholdsvis store nedslagsdistrikt ret rigt forsynet med forskellige større og mindre ferskvands-sjøer. Langs øens østlige side ligge saaledes Bjørnskarsvandene, Glimma og Røsnesvandet, der samtlig paa det nærmeste udfylde bundfladerne af forskellige transversale fjelddale eller næsten til havfladen nedskaarne fjeldkløfter, der skjær sig ind gennem Skulgamstindernes fjelddrag. Fra øens vestlige side breder det anseelige over 1 mil (11,3 km.) lange Skogsfjordvand sig frem i øst—syd-østlig retning til ind under foden af det vestlige afhæng af Soltindernes drag. Skogsfjordvandet, hvis vandspeil ikke ligger synderlig højere end havfladen, skal have en dybde af indtil 100 favne. Dets bund skal saaledes ligge mellem 5 à 600' (157—188 m.) dybere end havfladen.

Fjeldmassen eller Vanøens sydlige hoveddel er ved den omkring 1 mil (11,3 km.) lange Skibsfjorddal udskilt i tvende parallel-løbende i nord—sydlig retning strygende tvillingdrag. Det vestligste af disse naar i Vandtinden sin største højde med 3307' (1037 m.). Vandkisten, der er noget lavere, er ikke maalt.

Over de mere vestlig beliggende øer Nord-Kvalø og Ribbenesø naar de højeste toppe op til mellem 2000 à 2500' (627 à 784 m.). Længere vestover aftager fjeldmasserne stadig i højde. Sandvikøen naar sin største højde med 1300' (400 m.), Risø med 280' (88 m.) og vestenfor disse synker den faste fjeldgrunds tophøjder ned til omkring havfladen og under samme i den uendelighed af øer og skjær, der bygger den yderste skjærgaard.

Større regelmæssighed og en endog stærkt fremtrædende



ensartethed synes derimod at raade med hensyn til havdybderne efter de forskjellige sunde og havfjorde, der skjær sig imellem og indefter de her omhandlede øpartier. Paa kartet ville dybdeforholdene efter de forskjellige strøg findes opgivet i favne (1 favn = 1,9 m.) og det vil deraf fremgaa, at havrenderne mellem øerne i det hele og store viser en jevn regelmæssig maximumsdybde af mellem 100 og 120 favne (188—226 m.). Efter enkelte strøg er der vistnok at aflæse stærke afvigelser herfra. Efter Kvalsundets østlige halvdel naar dybden saaledes ned til 30 favne. En lignende dybde er raadende efter dybderenden efter Skagø Sundets midtparti. Efter det korte sundløb mellem den lille ø Karlsø og Renø naar renden en regelmæssig dybde af omkring 60 favne.

Efter Langsundet ere forholdene i saa henseende ret mærkelige. Sundet er nemlig udskilt i tvende kummer, af hvilke den nordre har en maximumsdybde af omkring 70 favne, den søndre en dybde af 60 favne. Disse to kummer ere indbyrdes adskilte ved en bred bank, der stiger op til en højde af omkring 19 favne under havfladen. Den nordre kumme afstænges mod nord ved en 10 à 14 favne dybt liggende bank, der skjær sig over fra Ringvatsøens nordøstlige pynt hen til Rensøens nordvestlige hjørne. Den sydlige kumme afstænges mod syd ved en 25 favne dybgaaende bank. Disse banker er rimeligvis byggede af løst materiale og i saa tilfælde af secundær oprindelse. Det samme kan maaske ogsaa gjælde de nysnævnte afvigelser fra det normale forhold, der ere paaviste efter Kvalsund, Skagø Sund og Karlsø Sund.

Af de forskjellige større og mindre fjorde, der skjær sig ind efter øerne her, ere flere udad lukkede ved lignende banker, der skyde i sammenhæng over fra den ene fjordbred til den anden og saaledes stænger for en indenfor liggende kum. Dette er saaledes tilfældet med Daavfjord, der inden-



for banken naar en dybde af 80 favne, medens banken selv naar op til 30 à 40 favne under havfladen. Den lille fjord eller bugt, der skjær sig ind ved Sørskar ved Nord-Kvalø's nordvestlige side lukkes ved en 2 favne dyb banke, medens kummen indenfor naar en dybde af 14 favne. Den lille Løgsfjord paa Ribbenesøens vestside afstænges ved en 8 favne dyb banke. Kummen indenfor har derimod en dybde af opimod 30 favne. Rimeligvis vil et lignende forhold være at paavise ogsaa paa andre punkter inden de her omhandlede strøg.

I geologisk henseende bygges den faste fjeldgrund over disse strøg af gneisartede lagrækker, der danner det stærkest fremtrædende bygningsled. Desforuden optræder her ogsaa forskellige større og mindre afdelinger, byggede af lagrækker, der ere at indordne under Dividalsgruppen og dels ogsaa ind under Tromsø glimmerskifer-gruppe. Af massiver stikker her frem granit og diorit.

De forholde, hvorunder disse afdelinger i henhold til de foran fremlagte detail-iagttagelser træde frem, skulle her søges fremstillede i en kort samlet oversigt.

## I. Lagdelte bergslag.

### a. Gneisfeltet

er at udsondre i tvende større hovedled nemlig Kvalsundets og Skulgammens afdelinger. Af disse er Kvalsundets afdeling at opstille som den ældste.

#### α. Kvalsundets afdeling

dannes af lagrækker af graa glimmergneis i veksling med glimmerskifer, hornblendeskifer, hornblendegneis, kloritiske skifere og kvartsiter. Saaledes findes afdelinger oftere træ-

dende frem i særdeles smuk veksling af lysere og mørkere strata.

Disse mange forskellige led, hvoraf afdelingen dannes, optræder under saa mange og saa regelløse vekslinger, at det neppe lader sig gjøre at henføre enkelte eller flere af disse til mere bekjendte niveauer.

Mest typisk udpræget optræder afdelingen over den sydlige del af Ringvatsø i strøget mellem Skogsfjordvand, Kvalsund og Skagø Sund, ligesom ogsaa over den sydlige del af Ribbenesø.

Over disse strøg viser gneisen en temmelig konstant lagstilling, nemlig en strøgetning, der under stejlt nordostligt fald kan svinge mellem  $140^{\circ}$ — $160^{\circ}$  (retv.). Den udpræget skifrige gneis afløses forøvrigt paa mangfoldige steder af lag af haardere i petrografisk henseende mere ensartede gneisdannelser. Idet disse mer og mer kunne tabe den udprægede skiferstruktur, gaa de saaledes over til en granitisk gneis, der igjen kan antage en mer og mer udpræget granitartet struktur og saaledes blive at betegne som gneisgranit og tildels ogsaa som ren granit. Saaledes som overgangsforholdene her ere at aflæse, er det aabenbart at disse vekslinger alene kunne være at opfatte som petrografiske afændringsformer. Inden de renere gneisrækker veksler saaledes gneisen overordentlig hyppig med saadanne haardere gneis-granitiske lag, ligesom og med lag af i brudet renere granitisk sten og danner derunder sammenhængende rækker med conform lagstilling. Og selv efter saadanne partier, hvor gneis-graniten optræder mere forherkende, vil en saadan veksling hyppig være at paavise af haard gneis-granit med lag af renere udpræget skiferstruktur, idet den skifrige sten her naturligvis optræder mere underordnet. I petrografisk henseende er der ogsaa en saadan overensstemmelse mellem gneis-afdelingens graa gneis og gneis-graniten, at den allerede i og for sig synes at vidne

for en ensartet og samtidig oprindelse. Den graa glimmergneis dannes af kvarts og smudsig graa, undertiden rødlig orthoklas efter et indbyrdes stærkt vekslende kvantitativt forhold, mer eller mindre indblandet med brunlig glimmer og skjæl af hvid glimmer. Ved siden af orthoklas er nu og da ogsaa at paavise plagioklas, men altid dog sparsomt, og den er saaledes at opstille som en mer tilfældig bestanddel. Gneis-graniten og den til samme knyttede granit er sammensat af de samme mineralske bestanddele, og navnlig er at fremhæve, at feltspathen ogsaa her saagodtsom eneraadende dannes af orthoklas. Dette forhold vil her antagelig være at tillægge saameget mere betydning som der efter Skulgammens fjelddrag — hvad der nedenfor nærmere skal blive paavist — er at aflæse tilsvarende overgange fra en oligoklas rig gneis til en gneis-granit med oligoklas som stærkt fremtrædende feltspathbestanddel. Disse fra de to forskellige udgangspunkter til hver sin side førende og derunder dog saa analoge overgangsforholde lade sig vanskelig forklare under forudsætningen om, at forskellige her som overgangsled opstillede dannelser med hensyn til oprindelse skulde være at opføre som mere selvstændige led.

Medens disse gneis-granitiske afændringsformer allerede i strøgene langs efter Kvalsund og over Ribbenesø optræde, — om og i det hele mere underordnet, — er det dog navnlig efter de mere nesformige landpartier langs efter Ringvatsøens nordside og fremdeles over øerne Grötø, Nord-Kvalø, Helgø og Vanø og endvidere ogsaa over Risøgruppen, at bergarten i det hele optræder stærkere gneis-granitisk udpræget.

Gneis-graniten optræder i regelen mer eller mindre udpræget lagdelt, idet lagdelingen nærmest er betinget ved den mørke glimmers stribevisse fordeling. Selv efter saadanne strøg, hvor gneis-graniten i dagen viser sig tilsyneladende ulaget, vil den ved nærmere undersøgelse dog vise

en bestemt lagdeling. Det er saaledes betegnende nok, at de løse blokke og fjærestene ogsaa efter saadanne strøg altid viser en bestemt gneisartet struktur, og at brudstykker af ret granitisk struktur neppe vil være at paavise.

Mere underordnet optræder inden gneis-graniten partier af en renere udpræget rødlig granit, der i regelen er fattig paa glimmer, tildels ogsaa paa det nærmeste glimmerfri; optræder glimmer her, saa er det ikke gneisens eller granitens mørke mere storbladede glimmer, men derimod skjællat sølvhvid glimmer. Denne røde granit optræder snart som gangartede dannelser, vistnok oftest under noget uregelmæssige former, hyppigst dog som lejer inden den lagede bergart. Disse gangformnde dannelser kunne imidlertid afbøjes til lejer, og efter disse vil den renere granit findes lidt efter lidt at gaa over i gneis-graniten eller den mere udprægede gneis. Disse røde granitiske baand tilhøre saaledes aaabenbart gneisafdelingens lagrækker.

Paa et par steder — nemlig ved Finkirken paa Ribbenesø og ved Sørskar paa Nord-Kvalø — ere at paavise ganske ejendommelige granitiske dannelser. I disse optræder orthoklasen og kvartsen ikke i kornig forbindelse, men ere derimod indbyrdes tilknyttede i store udskilte samlede masser, ofte af flere fods kubikindhold. Den røde orthoklas danner herunder den stærkest fremtrædende bestanddel og kan oftere helt omslutte kvartsmasser af over 1 fods gjennemsnit. Kvartsen og orthoklasen flyde i kontaktpartierne ofte saaledes over i hinanden, at der synes at kunne være grund til at forudsætte, at disse voluminøse udsondringer af orthoklas og kvarts maa være udskilte paa den vaade vej.

Dioritiske partier gjennemsætte hyppig, tildels i svære uregelmæssige masser gneis-graniten ligesom ogsaa gneisen. Saadanne partier af den mørke diorit sees saaledes at stikke frem over Vandtinden paa Vanø og Teisttinden paa Nord-Kvalø, brydende frem gennem de nøgne af gneis-granit



byggede fjeldstyrtninger. At idetmindste enkelte af disse dioritiske partier kunne være at opstille som afændringsformer under hornblendegneisen paa samme maade som gneis-graniten under glimmer-gneisen antages som en mulig forudsætning.

Den her omhandlede gneis-afdeling med den til samme knyttede gneis-granit er at indordne under kyststrækningens vidtstrakte gneis- og gneis-granitiske felt. Paa grund af stedets anseelige udstrækning gennem en længde af opimod 3 breddegrader vil der imidlertid allerede paa forhaand være grund til at forudsætte, at stærkere eller svagere variationer i bergartens petrografiske grundpræg vil være at kunne paavise efter forskellige strøg inden det vidtløftige omraade. Saa er i virkeligheden ogsaa tilfældet her. Lofotens gneis-granit afviger i petrografisk henseende temmelig stærkt fra Vesteraalens og Hindøens, og disse afændringer igjen fra gneis-graniten inden de her omhandlede strøg. Lofotens gneis-granit viser saaledes hyppigst en mere rødlig grundfarve, er ofte af en meget løskornig struktur og gaar derunder hyppig over til en halv sandstenartet dannelse, der let kan ry sammen til sand. Den er endvidere temmelig regelmæssig indblandet med magnetit, - tildels endog i den maalestok, at magnetiten kan være at betegne som en mere væsentlig hovedbestanddel, idet den mørke magnesiaglimmer samtidig kan findes ganske tilbagetrængt. I Vesteraalens og Hindøens gneis-granit er bergartens hovedbestanddele stærkere sammenknyttede, saa en mere sandstenartet struktur her aldrig er at paavise. Den er paa det nærmeste fri for indsprængt magnetit. Grundfarven er oftest rødlig.

Gneis-graniten inden det her omhandlede omraade viser derimod i regelen en mere smudsig graa grundfarve. Bergartens hovedbestanddele feltspathen og kvartsen ere stærkt sammenknyttede og afændringer af mere sandstensartet struk-



tur vil heller ikke her være at paavise. Magnetit mangler enten ganske eller optræder i ethvert tilfælde kun højst sparsomt.

### β. Skulgams-gneisen.

Opunder Skulgamstindernes sydvestlige afhæng afløses Kvalsundets gneis af lagrækker af en gneisartet sten med en stærkt fremtrædende hvidlig grundfarve. Idet fjeldmasserne efter dette fjelddrag i regelen sikker frem med udækkede dagflader, sees den hvide bergart her allerede i stor frastand at træde frem i et stærkt modsætningsforhold til Kvalsundets af mørkere afændringer byggede gneisafdeling.

Det stærkt forherskende led inden Skulgamsafdelingen dannes af en hvidlig laget gneis, sammensat af hvid feltspath — oftest overvejende oligoklas — og kvarts, medens den mørke glimmer er samlet i tynde, indbyrdes ligesom ogsaa med skiferfladerne parallelløbende striber eller flag. Denne gneis veksler forøvrigt ofte med lag af hornblendeskifer eller hornblendegneis, af glimmerskifer, kvartsitiske, tildels ogsaa kloritartede skifere. I grændsepartierne med Kvalsundets gneisafdeling falder lagstillingen inden begge afdelinger sammen, idet strøgretningen her overalt ligger regelmæssig mellem  $140-160^{\circ}$  med stejlt nordvestligt fald. Forsaavidt disse afdelinger skulde være at holde ud fra hinanden som mere selvstændige hovedled, vil altsaa Skulgamsafdelingen paa grund af overlejningsforholdet være at sætte som den yngste. Længere nordover viser strøgretningen sig noget mere variabel og vil derunder oftere findes afbøjet til mere nord-sydlig, medens faldet dog fremdeles altid er stejlt østligt.

Lignende overgangsforholde som de, der ovenfor ere omhandlede, under Kvalsundets afdeling, nemlig fra gneis til gneis-granit og derfra videre til mere udpræget granit vilde ogsaa være at paavise her, men med de modifikationer,

der ere betingede af de to forskellige gneisafændringers mere særlige petrografiske egenskaber. Gneisgraniten og graniten bevarer saaledes her gneisens hvidlige grundfarve, idet feltspathen i samme ligesom i gneisen væsentlig dannes af hvid oligoklas. I strøgene om Glimma optræder saaledes en smuk hvid granit, der efter al sandsynlighed er nært tilknyttet den i nærheden optrædende gneis-granit, hvorvel det skal tilføies, at der ikke har været anledning til her mere direkte at forfølge de gjensidige overgangsforholde. Oligoklasen i denne granit viser hyppig en udpræget tvillingstripping og danner tilligemed kvarts i mer eller mindre indblanding bergartens egentlige grundmasse. Paa sine steder findes denne invævet med skjæl af grønlig klorit. Længere nordover, saaledes i strøgene om Bjørnvandene, træder den kloritiske bestanddel stærkere frem, og bergarten kan her være at betegne som en protoginartet afændring.

I modsætning til Kvalsundets orthoklas-gneis og orthoklas-granit, er de afændringer, der bygge Skulgamstindernes drag, nærmest at opstille som en oligoklas-gneis eller oligoklas-granit.

Disse overgangsforholde paa den ene side fra Kvalsundets orthoklas-gneis-granit og granit og paa den anden side fra skulgammens oligoklas-gneis til oligoklas-gneis-granit og granit synes, som allerede tidligere fremholdt, snarest at skulle pege hen paa, at gneis-graniten og graniten inden disse to her omhandlede felter maa være at opfatte som petrografiske afændringsformer under de to mere selvstændige gneisdannelser. Herfra ere disse afændringsformer bøjede ud som tvende sideordnede grene.

Skulgammens gneisafdeling gjennemsættes af en mørk dioritisk bergart. Denne optræder i mer eller mindre mægtige baandmasser: Disse, hvoraf enkelte med en anseelig længdeudstrækning kunne have en mægtighed fra nogle faa fod til opover flere hundrede fod, overskjær tildels gneis-

lagene under en spids vinkel og kunne i saa tilfælde nærmest være at betegne som gangdannelser. Paa andre steder spænde de sig mere lejeformig frem mellem gneisens lagrækker.

Navnlig efter det sydvestlige parti af Skulgamstindernes fjelddrag optræde disse dioritiske baand i saa stort antal og i saa hyppig paa hinanden følge, at man let kan komme i tvivl om, hvilken af de to bergarter gneisen eller dioriten her skal være at betegne som fjeldgrundens egentlige hovedled.

## b. Dividalsfeltet.

Lagrækker, der antagelig maa være at indordne under denne afdeling, optræder ret rigt udviklede paa Ringvatsø, paa Varø og paa Renø.

Over Ringvatsø bygge saadanne fjeldgrunden inden et større sammenhængende omraade fra Skogsfjordvandet nordover til de indre partier om Daavfjord og Grundfjord og herfra videre over til Langsundets nordlige del. Afdelingen bygger her aasdrag af en højde af omkring 1000' (314 m.) eller noget derover.

Lagrækkerne dannes af mørke, haarde skifere og grønne kloritiske skifere i veksling med lerglimmerskifer og kvartsitisk skifer. Strøgretningen er regelmæssig omkring øst—vestlig med 30 à 40° nordligt fald.

Paa et par steder inden denne afdeling optræder ret mægtige dannelser af temmelig ren, ublandet svovlkis og af magnetkis. Henimod den indre bund af Grundfjord ved sammes vestlige side optræder saaledes et opimod 4 fods mægtigt leje af en finkornig med noget kvarts indblandet, men forøvrigt særdeles ren svovlkis. Ved bunden af Skogsfjord ligger et indtil 6' mægtigt leje af en med svovlkis ind-

blandet magnetkis. Paa begge disse punkter har forsøgsdrifter været i gang.

Til denne afdeling er endvidere at knytte en konglomeratdannelse, der optræder i nærheden af gaarden Elvenes ved Langsund. Konglomeratet bygger her en større knaus og er sammensat af oftest afrundede brudstykker af diorit, granit, kvartsit, hornblendegneis og tildels ogsaa kornet kalksten, sammenknyttede ved et grønt kloritisk binde-middel.

Over Vanø bygger Dividalsgruppen smalere belter efter det lave underland langs øens sydvestlige side og fremdeles langs efter den vestlige side fra Vannerejdet sydover til noget forbi gaarden Kammen.

Ved Vandvaag ved øens sydøstlige hjørne optræder lagrækker af en ejendommelig smudsig, graa, kvartsrig, lerskiferagtig sten i veksling med lag af bænke af en magnesiholdig dolomitartet kalksten. I dolomiten findes jernglimmer indsprængt. I dagfladerne er denne skifer ofte stærkt hvidlig som en følge af udskilt kalk. Strøget er her noget variabelt, faldet veksler fra nordligt til nordvestligt.

Forøvrigt dannes afdelingens lagrækker saavel efter Vanøens østlige som vestlige side af lerglimmerskifer, grønne kloritiske skifere i veksling med kvartsitiske skifere. Lagstillingen falder efter disse strøg overalt nogenlunde sammen. Strøgretningen er saaledes her temmelig regelmæssig o.—v., faldet omkring 30° n.

Dividal-gruppens lagrækker findes saavel efter Vanøens sydøstlige som efter dens vestlige side overordentlig hyppig gjennemsat af dioritiske partier. I kontaktpartierne mod skiferen gaar dioriten oftere over til en grønstensskifer.

Over den sydlige del af Renø træder afdelingen frem i mægtige lagrækker af mørke, tildels kulstofholdige lerglimmerskifere, grønne kloritiske skifere i veksling med tildels mægtige lagrækker af kvartsitisk skifer. Indlejninger af



krystallinisk kalksten mangle her ganske. Den her raadende lagstilling viser fremdeles temmelig regelmæssig en øst—vestlig strøgretning, medens det tildels variable fald — snart nordligt, snart sydligt — angiver enkelte, i det hele dog svage foldninger.

Med hensyn til det gjensidige aldersforhold mellem disse forskellige her omhandlede partier, saa vil det af flere grunde altid være vanskeligt at besvare dette spørgsmaal med mere afgjørende sikkerhed. Fossile rester ere hidtil ikke blevne paaviste inden disse afdelinger, og man mangler saaledes heri et nødvendigt støttepunkt for med bestemthed at kunne sammenstille de forskellige spredte partier, der antages at maatte være at indordne under denne samme hovedgruppe. Hertil kommer endvidere, at disse forskellige til Dividalsgruppen henførte partier ligge udskilt saavel indbyrdes som ogsaa fra det egentlige over indlandsstrøgene udbredte hovedfelt. De forskellige andre holdepunkter, der i saa henseende her kunne være at fæste sig ved, saaledes som lagstilling og petrografiske forholde, kunne vistnok ikke være at tillægge fuld afgjørende betydning.

Lignende hensyn, som her ere fremholdte ligeoverfor spørgsmaalet om de enkelte partiets plads inden gruppen, kunne ogsaa være at gjøre gjældende ligeoverfor spørgsmaalet om de her omhandlede afdelingers forhold til Tromsø glimmerskifer-gruppe, Dividalsgruppen og Tromsø glimmerskifergruppe. Dividalsgruppen og Tromsø glimmerskifergruppens lagrækker løbe ogsaa ofte saaledes over i hinanden, at de hyppig ligesaa snart kunne synes at træde frem som paa hinanden følgende led inden en og samme gruppe som at de skulde være at sammenstille som af hinanden uafhængige, tilhørende forskellige grupper. Inden det her omhandlede omraade optræder glimmerskifergruppen — den nordlige del af Renø og den lille Karlsø fraregnet — kun lidet udviklet og aflæsninger, der mere ligefremt kunne tjene



til støtte for en gruppesondring, ere ikke gjorte. For Renøens vedkommende maa saadanne aflæsninger, der mere bestemt vilde pege i den ene eller anden retning, antagelig være at gjøre i strøget mellem Grøtnes og Sørejdet. Dertil har der imidlertid hidtil ikke været anledning. Paa grund af de særlige petrografiske forholde, der saa konstant præge de til Dividalsgruppen ber henførte skiferdannelser, — paa grund af disse lagrækkers store udbredelse over forholdsvis anseelige og sammenhængende omraader — og endvidere paa grund af den inden disse afdelinger raadende lagstilling, der saa bestemt afviger fra den, der er raadende inden Renøens utvivlsomme glimmerskiferafdeling, samtidig som den inden de her omhandlede afdelinger overalt er samstemmende — antages der foreløbig at være al grund til at holde paa den her opstillede sontring. I saa tilfælde ville de her omhandlede lagrækker være at henhøre til Dividalsgruppen.

Dividalsgruppen er — saavidt den hidtil er kjendt — nedenfra opad bygget af følgende etager:

- a) røde, grønne og sorte lerskifere,
- b) haard kvartsit (kvartskifer),
- c) mægtige lagrækker af milde lerglimmerskifere, kloritiske skifere med overgange til og i veksling med glimmerskifer.

De inden det her omhandlede omraade til Dividalsgruppen henførte lagrækker maa saaledes være at indordne under gruppens yngste afdeling (etage) c.

#### c. Tromsø glimmerskifer-gruppe

inddeles nedenfra opad i tvende afdelinger,

- a) Rosta-kvartsit,
- b) Glimmerskifer med kalkstensindlejninger.

Lagrækker, der ere at indordne under denne gruppe, ere

paaviste paa Vanø i fjeldpartiet Kvalkjæften — efter den nordlige side af Ringvatsø langs Langsundet som smalere belter —, over den nordlige del af Renø og endelig over den lille ø Karlsø.

Paa Vanøen bygges fjeldpartiet Kvalkjæften af lagrækker af tyndlaget kvartsitisk skifer, indvævede med skjæl af grønlig kloritisk glimmer. Strøgretningen omkring nord—sydlig. Langs fjeldpartiets østlige side er faldet svagt vestligt, langs den vestlige side derimod svagt østligt, -- lagene altsaa svagt skaalformig bøjede.

Aflæsninger, der mere ligefrem skulde vidne for at Kvalkjæftens skiferafdeling er at stille i et overlejningsforhold til de under Dividalsgruppen indordnede lagrækker, der stikke frem langs vestsiden af Vanø i lavlandspartierne under Kvalkjæftens vestlige afhæng, ere vistnok ikke gjorte. Det brede underland er her i regelen overdækket navnlig af myr, og fast berg træder i regelen her først frem nede langs efter strandpartierne. Den indbyrdes saa stærkt afvigende lagstilling synes imidlertid med bestemthed at skulle angive en for disse forskjellig dannelsesetid. Kvalkjæftens skiferafdeling maa i saa tilfælde utvivlsomt være den yngste, ikke alene fordi den bygger de højere liggende aasdrag, men ogsaa fordi lagstillingen her stærkt nærmer sig horisontalfladen, medens den i den nærliggende i lavere niveau optrædende Dividalsgruppe viser et regelmæssigt nordligt fald af opimod 30 à 40°. I henhold hertil antages Kvalkjæftens skifer at maatte være at indordne under Tromsø glimmer-skifergruppe, og inden denne rimeligvis at være at sammenstille med gruppens ældste afdeling, Rosta-kvartsiten — hvorvel Kvalkjæftens mere tyndlagede kvartsitiske skifer i petrografisk henseende vistnok synes at skulle afvige fra den haarde og mere tykbænkede kvartsit i strøgene om Rostavand og om Sulangens indre bund.

Mægtigheden af Kvalkjæstens skiferafdeling naar op til omkring 1200' (376 m.)

Ved Hamnes paa Ringvatsø ved Langsund optræder i de laveste partier striber af glimmerskifer med kalkstensindlejninger. Det indbyrdes lejningsforhold mellem glimmerskiferen og de til Dividalsgruppen henhørende lagrækker, der optræde i nærheden her, lader sig ikke bestemtere aflæse.

Det er imidlertid navnlig over den nordlige del af Renø — fra Sørejde nordover til øens afslutning — at glimmerskifergruppen træder frem meget udpræget. Her dannes den af gruppens yngste afdeling, glimmerskifer med de til samme knyttede afdelinger af krystallinisk kornig kalksten. Paa sine steder veksler glimmerskiferen ogsaa med feltspathrige, rene, gneisartede strata. Lagstillingen er her omkring nord-sydlig med vestligt fald langs øens østlige side, derimod med østligt fald langs øens vestlige side. Tversover øen fra øst mod vest ligger altsaa lagene svagt skaalformigt bøjede. Lagstillingen her falder saaledes ganske sammen med den, der er raadende inden Kvalkjæstens fjeldparti og afviger derimod stærkt fra forholdet, som det træder frem over Renøens sydlige del inden den til Dividalsgruppen henvorte afdeling.

Den lille mellem 3 à 400' (omkring 100 m.) høje ø Karlsø er inden de laveste niveauer efter øens midtre parti bygget af en kloritisk glimmerskifer, forøvrigt derimod helt og holdent af krystallinisk kornig kalksten. Denne er paa sine steder stærkt kulstofholdig og i saa tilfælde af en sort eller mørk grundfarve, — paa andre steder derimod smuk hvid. Hvide og mørke partier veksle hyppig og temmelig regelløst. Kalkstenen er ofte rigt indvokset med sort eller hvid Tremolith, eftersom den stikker frem i den mørke kulstofholdige eller den hvide kalksten.

Det er forøvriddt et mærkeligt forhold, at metamorfosen

inden glimmerskifergruppen i regelen er langt stærkere frem-skreden end tilfældet er inden den ældre Dividalsgruppe. Saa er forholdet ikke alene her, men overalt over den nord-lige del af den skandinaviske halvø, hvor disse afdelinger optræde.

## II. Massiver.

### a. Granit.

Den til gneisen knyttede gneis-granit og granit er, som tidligere fremholdt, nærmest at opfatte som petrografiske af-ændringsformer under gneisen og i henhold hertil af sedi-mentær oprindelse. Renere udpræget granit er alene paa-vist inden Skulgamstindernes fjelddrag paa Ringvatsø. For det tilfælde denne her optrædende smukke, hvide oligoklas-granit ikke ligeledes skulde være at opstille som en af-ændringsform under Skulgamstindernes oligoklas-gneis — hvad der ovenfor er gjort, og hvorfor der i henhold til det der anførte maaske kunde være adskillig sandsynlighed — maa den være at betegne som en eruptiv granit. Det her om-handlede granitfelt er som saadant indtegnet paa kartet efter Ringvatsøens østlige side mod Langsundets sydlige af-slutning. Sammes grændselinjer har der forøvrigt ikke væ-ret anledning til nærmere at opgaa, og disse ere saaledes alene skjønsmæssig afsatte.

Andre granitiske partier af utvivlsom eruptiv oprindelse vil i ethvert tilfælde ikke være at paavise under det i denne afhandling omhandlede omraade.

### b. Diorit.

#### α. Ældre diorit.

Gneisen og navnlig gneis-graniten gjenneomsættes over-ordentlig hyppig af mørke dioritiske partier. Opper de

nøgne styrtninger af Vandtinden paa Vanø og af Teist-tinden paa Nordkvalø bemærkes saaledes allerede fra lavlandet saadanne mørke partier af tildels ganske anseelige dagflader, men som det synes i mere klumpformige uregelmæssige masser at bryde frem efter den lysere gneis-granitiske undergrund.

Ogsaa langs efter strandpartierne under foden af Vandtinden stikker frem forskellige kortere dioritiske drag.

Over de smaa halvøer, der skyde frem paa begge sider af Daavfjord paa Ringvatsøens nordside, optræde ligeledes forskellige større og mindre dioritiske partier eller drag, gjennembrydende gneisen og gneis-graniten.

Men navnlig er det efter Skulgamstindernes fjelddrag, at dioritiske gang- eller lejeformige partier stikke frem i et stort antal. Dioriten bryder her saa hyppig frem, at man oftere næsten kan komme i tvivl om, hvilket af disse bygningsled her skulde kunne være at betegne som det mest fremtrædende.

Allerede nede fra sejlleden sees disse mørke baand at bryde frem igjennem efter lysere gneis og gneis-granitiske undergrund opefter de fra de indskaarne tværdale opsigende stejle og udækkede fjeldvægge. Opgaaes fjeldmasserne nøiagtigere, saa vil man her saagodtsom overalt støde paa dioritiske partier, der i hyppig paa hinanden følge spænde sig frem som kortere eller længere baand med vekslede mægtighed fra nogle faa til op imod flere hundrede fod. Hornblende danner her i regelen stenens stærkt fremherskende bestanddel. I fjeldmassens højere liggende partier og navnlig op imod de egentlige højdepunkter eller topflader træder plagioklasen tildels stærkere frem, saaledes at denne med hornblendens optræder i nogenlunde jevnt kvantitativt forhold. Prøver af disse forskellige dioritiske afændringer have været mikroskopisk undersøgte af Helland og v. Lasaulx



og vil resultatet af disse undersøgelser findes fremlaget under detailbeskrivelsen.

Med hensyn til spørgsmaalet om dioritens forhold i genetisk henseende til gneisen henvises til de bemærkninger, der derom ovenfor ere fremlagte under afsnittet »Skulgammens gneisafdeling«.

### β. Yngre diorit.

Langs efter Vanøens sydøstlige og vestlige side gennem sættes de til Dividalsgruppen indordnede lagrækker overordentlig hyppig af en dioritisk bergart, der i visse henseender optræder med et ejendommeligt særpræg og i petrografisk henseende ogsaa synes at afvige ganske betydelig fra den nysnævnte ældre diorit. Denne yngre diorit er i regelen mere storkornig udviklet end den ældre, hvorvel ogsaa mere finkornige afændringer her kunne optræde. Plagioklassen viser ofte en udpræget tvillingstribning og danner tillige en stærkere fremtrædende bestanddel. Dioriten gjenemsættes her meget hyppig af snore eller aarer af epidot. Rød skapolit optræder i samme navnlig efter øens sydøstlige side i aarer eller smalere baand. Ligeledes er kvarts og kalkspath som hyppige udsondringer at paavise i samme. Endvidere findes den dioriske grundmasse indsprængt med svovlkis og kobberkis.

I kontakten med Dividalsgruppens lagrækker kan denne yngre diorit gaa over til en fuldstændig skiferdannelse (grønskifer), der viser en lagstilling, der ganske falder sammen med den, der raader inden den tilstødende skiferafdeling. Denne grønnskifer danner saaledes et mellemed eller et overgangsled mellem diorit og Dividalsgruppens skifere.

Prøve af denne yngre diorit er mikroskopisk undersøgt ved A. Helland og af ham nærmere beskrevet i afhandlingen »Mikroskopisk Undersøgelse af en Del Bergarter

i det nordlige Norge« som diorit fra Vandvaag, Vanna pr. Karlsø\*)

### III. Kvartærtidens dannelser.

Af saadanne kunne mærkes:

Strandlinjer og terrassedannelser,

morænevolde,

sandafléininger og myrbedækninger.

Strandlinjer findes rigt udviklede langs Kvalsund og Langsund og fremdeles langs den østlige side af Renø. Terrasser i flere paa hinanden følgende sæt ere at paavise paa forskjellige punkter langs Kvalsund ligesom ogsaa ved udmundingen af Grøtnesdalen paa Renø. Disse dannelser har tidligere nærmere været omhandlet i en særskilt afhandling »Terrasser og gamle strandlinjer«\*\*), og skal jeg her henvise dertil. Den allerede tidligere fremholdte forudsætning, at de egentlige »strandlinjer« i regelen ville findes at optræde langs efter de indre sundløb og de indenfor liggende fjorde, og at de i det hele synes at tabe sig ud mod de ydre kyststrøg, er yderligere bleven støttet gennem de undersøgelser, der i saa henseende i sidste sommer (1882) ere blevne gjorte langs efter de ydre havstrøg udenfor Kvalsund. Efter Sandviksø- og efter Risø-gruppen har der saaledes intetsteds været at paavise endog spor til saadanne. Dette forhold er saameget mere at fæste sig ved, som de nysnævnte øpartier ere byggede af haarde gneis- eller gneisgranitiske lag. — altsaa af bergarter, der særlig egnede sig for at bevare strandlinjedannelser gennem lange tidsrum, om saadanne der skulde have været indgravede. Det synes

---

\*) Tromsø museums aarshefter III pg. 18.

\*\*) Tromsø museums aarshefte III.

saaledes at skulle fremgaa, at de kræfter, der i sin tid i saa stor maalestok have været medvirkende til dannelsen af strandlinjen langs efter Kvalsund, Langsund og Grøtsund, ikke kunne have strakt sig ud over de egentlige kyststrøg udenfor Kvalsund.

Af gamle morænevolde er navnlig at mærke den mægtige vold, der lukker for Glimvandets nedre ende og afstænger samme fra sjøen. Med en anseelig bredde naar den en højde over havfladen af 150' (47 m.) og en højde af 22' over Glimmas havspejl. Glimmas bundflade ligger paa det nærmeste i havfladens niveau.

Det anseelige skogsfjordvand er ligeledes afstængt fra den til samme stødende fjordbund ved en bred vold. Hvorvidt denne er bygget af fast berg eller løst materiale, er ikke nærmere undersøgt. Da Skogsfjordvandet naar nogenlunde samme dybde som Skogssundet udenfor samme, vil der paa forhaand være mest grund til at forudsætte, at volden er bygget af løst materiale. Disse ferskvandssjøer ere saaledes ikke at betegne som i fast berg udgravede bækkener. Deres bundflade have derimod dannet bundfladerne af tidligere fjorddannelser, der gennem de senere afsatte morænevolde ere gaaede over til ferskvandssjøer.

Foruden de her nævnte over havfladen opskydende moræner er der at paavise forskellige undersøiske voldannelser, der spænde sig tvers over flere af fjordmundingerne og saaledes lukker for dybere indenfor liggende kummer. Disse voldannelser, der vil findes afsatte paa kartet, maa utvivlsomt være af glacial oprindelse og saaledes at opfatte som gamle rimeligvis under havfladen afsatte moræner. Saadanne dannelser ere at paavise ved Langsundets nordlige udmunding, ved udmundingen af Daavfjord og Grundfjord, ved udmundingen af den lille Sørskarsfjord paa vestsiden af Nord-Kvalø og endvidere ved udmundingen af Løgstfjord ved den vestlige side af Ribbenesø.

Skjælførende Sandlag er alene paavist efter den østlige side af Sandvikø ved gaarden Mjølvikén, hvor de optræder over forholdsvis ret anseelige flader og i mægtige ophobninger.

---

I henhold til den her leverede fremstilling kan de geologiske bygningsforholde efter det omhandlede omraade nærmere angives ved efterstaaende schematiske oversigt, idet de enkelte led derunder ere ordnede efter aldersrækken ovenfra nedad\*).

*Sedementære grupper:*

*Massiver:*

I. Kvartære dannelser.

a. *Postglaciale.*

- α. Myr, skjælførende sand og andre løse bedækninger.
- β. Terrasser og strandlinjer.

a. *Glaciale.*

Moræner.

II. Tromsø glimmerskifer-gruppe.

- a. Glimmerskifer, grafitholdig  
Skifer — med indlejninger  
af graalig hvid og af mørk  
kulstofholdig, krystallinsk  
kalksten.
- b. Kvalkjæftens kvartsitiske  
skifer (ækivalerer antagelig  
Rosta-kvartsiten).

---

\*) Cfr. „Det nordlige Sveriges og Norges geologi“. Archiv for Math. og Naturv. Kr.ania 1873. 3 Bd. pg. 36.

*Sedimentære grupper:*

*Massiver:*

III. Dividals-gruppen.

Lerglimmerskifer, grønne kloritiske skifere i veksling med kvartsitisk skifer (at indordne under gruppens yngste afdeling).

Yngre diorit.

IV. Grundfjeldet.

a. Skulgammens afdeling.

Ældre diorit, } yngre

b. Kvalsundets do.

Granit } end IV.

I begge disse afdelinger veksler gneisen med og gaar over til gneis-granit.

Inden de her omhandlede strøg dannes de egentlige højfjeldsmasser overalt — Renø fraregnet — af gneis eller gneisgranit. Det er ogsaa gneis-afdelingerne, der væsentlig bestemme disse øpartiers orografiske grundpræg, og vi skulle derfor her først noget nærmere fæste os ved enkelte herhen hørende, til gneisfeltet knyttede forholde.

Inden gneisafdelingerne kan lagstillingen variere efter de forskellige lokaliteter, medens den omvendt efter videre eller snævrere begrænsede omraader kan optræde under temmelig konstante forholde eller ogsaa saaledes, at der i saa henseende kan være at spore en vis regelmæssighed. Faldet er i regelen temmelig stejlt. Paa grund af den saa regelmæssig stejle faldvinkel stiger fjeldmasserne oftest op i stejle styrtninger. De korte dalfører, der skjær sig ind, skyder oftest frem mellem stejle fjeldvægge. Opad afslutter fjeldmasserne hyppig i tindeformige dannelser. Fjeldpartierne vise saaledes her ganske det samme orografiske grundpræg, der karakteriserer kyststrækningens øbelte i det hele. At dette forøvrigt kan findes stærkere eller svagere modificeret paa de forskellige steder eller efter de forskjel-



lige mere eller mindre skarpt afgrændsede omraader inden dette udstrakte øbelte vil allerede paa forhaand være at forudsætte. Gneisen og gneis-graniten kan nemlig efter dette — som allerede tidligere paaapeget — optræde under forskellige vekslende strukturforholde, der i stærkere eller svagere grad kunne gjøre sig gjældende inden de forskellige strøg. Langs efter Lofoten, hvor bergarten i regelen paa grund af sine strukturforholde og petrografiske egenskaber er lettere modtagelig for ydre kræfters destruerende indvirkning, end tilfældet er efter det her omhandlede omraade, vil ogsaa fjeldmasserne findes i langt højere grad end her gennembrudte og sønderskaarne. Renere udprægede alpeformige tinder ville derfor hyppigere være at paa- vise langs efter Lofoten end her. Ogsaa de for Lofoten og Vesteraalen saa karakteristiske toppedannelser, der kunne træde frem i paa hinanden følgende række af smaa, spidse, saglignende tinder, optræde her mere sparsomt. Inden de her omhandlede strøg stikke de alene frem paa et par punkter ud mod den yderste kyststrækning, nemlig efter den nordlige del af Sandvikø og over den straks nordenfor liggende lille ø Nord-Fuglø.

I det hele og store maa de bjergpartier, der bygge de her omhandlede kyststrøg, være at opfatte som et eneste sammenhørende fjelddrag, trods det, at det paa grund af ødannelsen maa være udstykket i ligesaa mange helt udskildte fjeldpartier som der er øer. Men ligesom tilfældet var efter Lofoten og Vesteraalen, saa træder denne udstykning ogsaa her frem efter en langt stærkere maalestok. Gjennem de for kyststrøgene her saa karakteristiske lavt liggende i regelen af alluvialmasser byggede ejdedannelser i forbindelse med de fra samme saa hyppig i modsat retning udskydende smaa fjorde, vil fjeldmassen inden den enkelte ø endvidere i regelen findes udstykket i to eller flere mere selvstændige øpartier. Det vil saaledes være aabenbart,

at ødannelsen ogsaa her i en tidligere tid maa have været langt stærkere udpræget, end tilfældet er nu.

I nysnævnte afhandling »Lofoten og Vesteraalen« er der søgt paavist, at ødannelsen, der i sine væsentlige træk maa være at føre tilbage til en af de ældste geologiske tidsperioder, og rimeligvis udgaaet som et resultat af de samme kræfter, der have forrykket gneisstraternes mere oprindelige lagstilling. Ogsaa for de her omhandlede landstrøg, der i orografisk som i geologisk henseende danner et led i det samme fjelddrag, i hvilke Lofotens og Vesteraalens fjeldpartier ere at indordne, maa lignende forudsætninger være at gjøre. Man skal imidlertid her ikke gaa videre ind paa behandlingen af dette spørgsmaal, men skal i saa henseende alene henvise til nysnævnte afhandling, hvor dette forhold vel findes nærmere omhandlet.

Derimod skal man her lidt nærmere fæste sig ved dybdeforholdene efter de forskjellige sunde og havarme, som skjær sig ind mellem de enkelte øer.

Som tidligere omtalt — hvad der ogsaa vil fremgaa ved at kaste et blik paa kartet, hvor dybderne findes optørte i favne — raader der i det hele efter de her omhandlede strøg en ganske mærkelig regelmæssighed, idet dybderenderne efter de forskjellige sundløb viser en jevn regelmæssig dybde, der ligger omkring 120 favne. Efter tre forskellige kortere strøg er der vistnok at paavise stærke afvigelser fra dette forhold. Som allerede tidligere omtalt, finder dette sted efter den østlige del af kvalsund, efter Langsund samt efter Skagø sundets midtre parti. Der er imidlertid al grund til at forudsætte, at de her nævnte afvigelser ere at tilskrive senere udfyldninger og saaledes at henføre til mere lokalt virkende kræfter. Det vil antagelig være grund til at forudsætte, at dybderenderne ogsaa efter de her nævnte sundløb mere oprindelig paa det nærmeste maa have svaret til de øvrige dybderender.

Hvorledes imidlertid forholdet i saa henseende end kan være, saa vil det i ethvert tilfælde være aabenbart, at denne uddybning af havrenderne efter en saa regelmæssig maalestok og udbredt efter et saa vidt og mangeartet forgrenet omraade som her, ikke kan være at henhøre til kræfter, som efter sin natur maa forudsættes at have virket med forskjellig intensitet efter de forskjellige lokaliteter. De kunne saaledes ikke være at henhøre til udgravningsarbejder gjennem udskydende strømme af indlandsis. Selv forudsat at saadanne isstrømme skulde kunne virke udgravende efter havbunden, vil det antagelig være at sætte som givet, at udgravning ad denne vej efter disse forskjellige og i forskjellige retninger løbende render ikke har kunnet foregaa efter en saagodtson overalt saa ensartet maalestok som tilfældet er her. Hvor stærkt udpræget glacialtiden end kan forudsættes her at skulle have optraadt, saa maa dog mægtigheden af isstrømmene og disses bevægelseshastighed have varieret ganske betydeligt efter de forskjellige retningslinjer, hvorunder de have skudt frem. Efter de sundløb, der ligge i hovedretninger for de udgaaende isstrømme, maatte udgravningsarbeidet i saa tilfælde utvivlsomt have foregaaet efter en stærkere maalestok end efter de, der transversalt udgaa fra disse. Efter de første skulde man derfor have ventet at træffe dybere render end efter de sidste. Kvalsundet burde i saa tilfælde have vist en større dybderende end Skagesund. Saa er imidlertid ingenlunde tilfældet. Naar man ser bort fra de førnævnte ophobninger af diluvium langs efter det østlige parti af Kvalsund og det midte parti af Skagesund, saa vil det sees, at dybderenderne efter begge disse sunde paa det nærmeste falde sammen. Af ydre virkende kræfter vil der antagelig ikke være at paavise nogen, der inden disse undersøiske niveauer skulde have kunnet frembringe saa ensartede resultater efter saa vidtstrakte omraader. Man ledes saaledes

nødvendigvis til forudsætningen om, at dybderenderne efter disse strøg ere at henføre til indre dynamiske kræfter, og med hensyn til oprindelse i tid rimeligvis at føre tilbage til tiden før den egentlige ødannelse. I ethvert tilfælde vil det være aabenbart, at de her omhandlede dybderender ere ældre end glacialtiden.

Da disse imidlertid indtil nu efter hele det her omhandlede omraade have bevaret en i det væsentlige ensartet dybde, saa vil ogsaa heraf fremgaa, at de stærke niveauforandringer i det indbyrdes forhold mellem den faste fjeldgrund og havfladen, der aabenbart have fundet sted gennem kvartærtiden, her overalt maa have traadt frem under helt ensartede former. De slutninger, der tidligere fra forholdene, som de ere at aflæse efter de i fast berg indgravede strandlinjer, ere dragne for jevne og regelmæssige niveauforandringer efter store sammenhængende strøg langs det nordlige Norge, synes saaledes yderligere at skulle støttes ved at se hen til de her omhandlede dybdeforholde. Skulde nemlig — hvad der ogsaa for vort lands vedkommende fra flere kanter forudsættes — niveauforandringerne gennem kvartærtiden have varieret mere væsentligt efter de forskellige selv nærliggende strøg, saa vilde hverken strandlinjerne nu have kunnet være at paavise i korresponderende højder efter saa store omraader som tilfældet er og heller ikke dybderenderne her traadt frem med saa jevne og regelmæssigde dybder, som ovenfor paavist.

Et tidligere fra Lofoten og Veseraalen paavist stratifikationsforhold, hvorefter lagstillingen temmelig regelmæssig bøjer sig efter kystlinjerne og de i orografisk henseende mere bestemmende indskjæringer af fjorde og ejder, træder ogsaa efter de her omhandlede strøg frem ret bestemt udpræget, — hvad der nærmere vil sees ved at kaste et blik paa kartet.



Af dybere indskjæringer, der ligge udspændte efter lagrækkernes strøgetning, er navnlig at mærke:

- 1) det omkring 2 mil (22,6 km.) lange Kvalsund, der fra de indre sundløb fører i transversal retning mellem Ringvatsø og Kvalø ud mod det aabne hav. Da lagstillingen langs begge Kvalsundets langsider optræder temmelig regelmæssig konkordant, ligger altsaa sundet udspændt som en spalte mellem og langs efter lagrækkerne.
- 2) Skarsfjord, der fra Skagesund skjær sig i sydvestlig retning — altsaa ligeløbende med Kvalsund ind efter Ringvatsø.
- 3) Det omkring 1 mil (11,3 km.) lange Skogsfjordvand paa Ringvatsø. Dette strækker sig ligeløbende med Kvalsund frem langs efter det nordlige afhæng af Kvalsundets fjelddrag. Disse tre indbyrdes ligeløbende indskjæringer ere aabenbart af samtidig oprindelse og rimeligvis at føre tilbage som resultat af de samme kræfter, der have fremkaldt den egentlige ødannelse.
- 4) Skibsfjorddalen, der paa Vanø skjær sig fra Skibsfjorden ind i sydlig retning mellem Vandkistens og Vandtindens fjelddrag.
- 5) Andamsejdet paa Ribbenesø.
- 6) Den nordlige del af Skagesund, — medens den sydlige del af sundet derimod er indskaaret lodret paa lagrækkernes strøgetning.
- 7) Ogsaa Løgsfjord paa Ribbenesø ligger delvis udskaaret efter den raadende strøgetning.

De yngre sedimentære lagrækker, der forøvrigt i det hele efter disse strøg i forhold til gneisen og de til samme knyttede mere eller mindre underordnede led kuns optræder lidet bestemmende i orografisk henseende, skyder alene frem dels i de lavest liggende niveauer som forholdsvis smale strimler og dels ogsaa som delvise udfyldningsmasser



mellem enkelte af de mere selvstændige af gneis og gneis-granit byggede fjeldpartier. De stue sig her op i lavere mere mildt formede aasdrag.

Alene paa Renø, der helt er bygget af yngre lagrækker, taarne disse sig op i høje fjeldpartier. Ved sine mildere former og sit mere ensformige ydre karakterpræg danner Renøen en stærkt fremtrædende modsætning til de af gneisen og gneis-graniten byggede fjeldmasser. Renø er i saa henseende ogsaa at holde ud fra kyststrækningens øgruppe og derimod nærmest at henhøre til de egentlige fastlandspartier eller maaske rettere at opføre som et orografisk mellemlid mellem fastlandet og de egentlige kyststrøg.

Medens lagstillingen inden gneisafdelingerne er temmelig gennemgaaende stejl og ofte nærmer sig vertikalplanet, naar lagenes faldvinkel inden Dividals- og glimmerskifer-gruppen sjelden over  $30^{\circ}$ . Over Ringvatsø og Vanø, hvor gneisen og de yngre lagrækker støde sammen i mere umiddelbart kontaktforhold, synes der at skulle være grund til at forudsætte, at den inden gneisafdelingen raadende lagstilling i det væsentlige maa være at føre tilbage til en tid, der ligger bagenom tiden for aflejningen af Dividalsgruppens lagrækker. I saa tilfælde vil tiden for den oprindelige ødannelse, der som ovenfor fremholdt er betegnet af de inden gneisafdelingerne raadende stratifikationsforholde og samtidig med disse her finde sin nærmere begrænsning fremad. Ødannelsen maa nemlig i saa tilfælde være ældre end tiden for Dividalsgruppens aflejning.

Ogsaa over Renø er lagstillingen inden de her til Dividalsgruppen og Tromsø glimmerskifergruppe henhørende afdelinger bestemt afvigende fra den, der raader inden gneisafdelingerne over de udenfor liggende øer. Uagtet foldninger inden Renøens lagrækker er at paavise, ere de dog svage, og det synes som om bygningsforholdene over Renø

mere maa nærme sig det oprindelige forhold, end tilfældet kan være inden gneisafdelingerne. Det kunde saaledes ogsaa her være grund til at forudsætte, at de kræfter, der have optaarnet Ringvatsøens fjeldpartier, i det væsentlige maatte have afsluttet sin virksomhed forinden afleiningen af de lagrækker, der bygge Renø. Imidlertid skal dog paa den anden side i saa henseende fremholdes, at højden af Skulgamstindernes fjelddrag paa Ringvatsø paa det nærmeste falder sammen ikke alene med Renskartindens fjeldparti paa Renø, men ogsaa med fjeldpartierne med det tversoverfor Renø liggende fastland, der er bygget af glimmerskifergruppens lagrækker. En saadan overensstemmelse i højdeforholdene efter disse forskellige fjeldpartier, opbyggede af lagrækker af indbyrdes ulige aldersforhold, synes ligesaa snart at pege hen paa en samtidighed i bergdannelsen. Det vilde dog være at betegne som en forunderlig tilfældighed om bergdannende kræfter, der havde virket til forskellige tider, i saa henseende her skulde have fremkaldt saa ganske samstemmende resultater. For tiden lader det sig vistnok ikke gjøre her at udrede disse tilsyneladene modsigelser. Trods de forskellige betydningsfulde indlæg, der gjennem de sidste aar er fremlagt til belysning af spørgsmaalet om bergdannelsen, er det dog aabenbart, at viden skaben her endnu ikke er naaet frem til en sikrere grund.

Inden de her omhandlede strøg har der forøvrigt ikke været anledning til at gjøre aflæsninger, der kunde tjene til støtte for de af Heim, Baltzer m. fl. fra Alperne dragne slutninger, om at faste bergmasser under stort tryk skulde kunne antage en vis plasticitet. Derimod synes der vistnok at skulle være grund til at forudsætte, at den inden kyststrækningens gneisafdelinger saa stærkt fremskredne metamorfose nærmest maa være ndgaaet fra det under lagstillingens stærke forrykning fremkaldte tryk. Det er jo

netop inden gneisafdelingerne at den oprindelige lagstilling har været underkastet de stærkeste forrykkelser.

---

Af mærker efter glacialtiden er tidligere nævnt morænevoldene foran enkelte af ferskvandssjøerne og endvidere undersøiske volde, der stænge for udløbene af forskellige fjorde og sundløb. Skjønt det vistnok ikke har været adgang til mere direkte at undersøge, hvorvidt disse undersøiske volde ere byggede af fast berg eller løst materiale, vil der dog utvivlsomt paa forhaand være al grund til at forudsætte det sidste. Der synes nemlig at skulle være liden rimelighed for, at transversale bergrygge her skulde stikke frem. Bergbygningsforholdene under havfladen maa vel antages i det væsentlige at skulle være præget paa samme maade som inden de over havfladen liggende niveauer, og her vil intetsteds bergrygge være at paavise, der skulde være at sammenstille med saadanne forudsatte transversale rygge.

Disse forskellige nysnævnte mærker vidne vistnok for, at glacialtiden efter disse strøg maa have virket inden mægtige former og tillige gennem lange tidsrum. Paa den anden side er det dog aabenbart, at glacialtiden ingenlunde efter nogen mere bestemmende maalestok kan have øvet indflydelse ligeoverfor disse landstrøgs orografiske bygningsforholde. Ligesom fjord-, sund- og ejde-dannelser som ovenfor fremholdt i det væsentlige maa være at føre tilbage til tidsrum, der ligge langt tilbage for glacialtiden, saa gjælder dette antagelig ogsaa dannelsen her i det hele og store. Der har i ethvert tilfælde ikke været at aflæse noget bestemt vidnesbyrd for, at glacialtiden i saa henseende her kan have været mere væsentlig medvirkende. Anderledes stiller sagen sig med hensyn til spørgsmaalet om dannelsen

af ferskvandssjøerne. En stor del af disse er aabenbart nærmest at henføre til glacialtiden. Bundfladerne i disse maa utvivlsomt oprindelig have dannet dele af bundfladen i dalfører eller fjorde. Gjennem afsætningen af transversale morænevolde er af disse fremgaaet nu vandfyldte kummer.

Tromsø, 6te november 1882.

---

# Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatten

von

Sophus Lie.

Ich gebe im Folgenden ein kurzes Resumé von einer Abhandlung, die im nächsten Bande erscheinen wird.

Gestattet eine Differentialgleichung  $f(xy \dots y^{(m)}) = 0$  eine Gruppe  $G_r$  (von Punkttransformationen) mit  $r$  Parameter, so findet man diese Gruppe, wenn  $G_r$  keine Curvenschaar  $\varphi(xy) = a$  invariant lässt, entweder durch Integration einer linearen Gleichung 2. O. (wenn  $r = 5$  oder  $6$ ) oder durch Integration einer linearen Gleichung 3. O. (wenn  $r = 8$ ). Lässt die Gruppe *eine* und nur eine Schaar  $\varphi = a$  invariant, und wird dabei  $\varphi$  nullgliedrig transformirt, so verlangt die Bestimmung der Gruppe  $G_r$  entweder die Integration einer lin. und homogenen Gleichung  $r^{\text{ter}}$  Ordnung (Typus  $(X_1q)$  oder die Integration einer solchen Gleichung von  $(r - 1)^{\text{ter}}$  Ordnung (Typus  $X_1q, yq$ , oder  $q, yq, y^2q$ ). Wird  $\varphi$  eingliedrig oder zweigliedrig transformirt, so findet man die Gruppe durch successive Quadraturen. Wird  $\varphi$  dreigliedrig transformirt, so integrirt man eine lin. Gleichung 2. O. Giebt es zwei invariante Schaaren  $\varphi_1, \varphi_2$ , so findet man die Gruppe durch Quadratur, wenn weder  $\varphi_1$  noch  $\varphi_2$  mehr als zweigliedrig transformirt wird; sonst integrirt man eine oder zwei lin. Gleichungen 2. O. Giebt es  $\infty$  viele Schaaren  $\varphi$ , so ge-



nügt Quadratur, wenn  $r = 1$ , und wenn  $r = 2$  (Typus  $p, xp + \lambda yq$ ); dagegen integrirt man eine lin. Gleichung 2. O. wenn  $r = 3$  oder  $r = 2$  (Typus  $pq$ ).

Ist die Gruppe gefunden, so bringt man dieselbe im Allgemeinen leicht auf ihre canonische Form; nur in den Fällen  $q; qyq; q, yq, y^2q$ , die wir hier der Kürze wegen nicht näher betrachten, wird die Integration einer Gleichung 1. O. erforderlich.

Gestattet eine vorgelegte Gleichung  $f_m = 0$  eine *bekannte canonische* Gruppe  $G_r$ , so kann die Integration ohne weiter geleistet werden, wenn  $r > m$ . Den Fall  $m > r$  reducirt man durch Integrationen einer Gleichung  $(m - r)^{\text{ter}}$  Ordnung auf den Fall  $m = r$ . Der Fall  $m = r$  verlangt nie schwierigere Integration als die Bestimmung der betreffenden Gruppe nach dem Obenstehenden schon verlangt hat. Hat die Gruppe eine unter den Formen  $X_iq; X_iq, yq; p, q; p, q, xp + yq$ , so genügen Quadraturen.

Die hiermit in Detail skizzirte Theorie kündigte ich in Göttinger Nachr. 1874 wie auch bei vielen späteren Gelegenheiten an. Ein ausführliches Resumé gab ich 3. Novbr. 1882 in Société mathématique de France.

Aehnliche Theorien beziehen sich überhaupt auf die Bestimmung von Gruppen, auf die Integration von Differentialgleichungen  $f_m = 0$  die eine Gruppe von *Berührungstransformationen* gestatten; endlich auf vollständige Systeme mit einer vorgelegten Gruppe (Vergl. Math. Ann. Bd. XI und XVI).

Decbr. 1882.

# Indhold.

	Side
<i>G. O. Sars.</i> Revision af Gruppen: Isopoda chelifera med Charakteristik af nye herhen hørende Arter og Slægter . . . . .	1— 54
<i>H. Geelmuyden.</i> Remarques sur la théorie de la lumière zodiacale	55—106
<i>Elling Holst.</i> Ein Beitrag zur methodischen Behandlung der metrischen Eigenschaften algebraischer Kurven . . . . .	109—114
<i>S. A. Sexe.</i> Skulde der ikke lade sig finde et reelt matematisk Udtryk, der kunde overtage de imaginære Størrelses Rolle eller gjøre samme Tjeneste, som disse Størrelser? . . . .	115—154
<i>Sophus Lie.</i> Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden . .	155—176
<i>Elling Holst.</i> Analytischer Beweis eines geometrischen Satzes . .	177—178
<i>Sophus Lie.</i> Ueber Flächen, die infinitesimale und lineare Transformationen gestatten . . . . .	179—193
<i>S. A. Sexe.</i> Alte Strandlinier und glaciale Schliff-flächen im Strandgürtel . . . . .	194—199
<i>Amund Helland.</i> Om Islands Jøkler og om Jøkelvelnes Vandmængde og Slangehalt . . . . .	200—232
<i>Amund Helland.</i> Høidemaalinger fra Island . . . . .	233—239
<i>Elling Holst.</i> Ein Paar synthetische Methoden in der metrischen Geometrie mit Anwendungen . . . . .	240—362
<i>Karl Pettersen.</i> Bidrag til de norske kyststrøgs geologi . . . .	363—442
<i>Sophus Lie.</i> Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatten . . . . .	443—444



# GEOLOGISK KART

over

## RINGVATS Ö

med omliggende Öer,

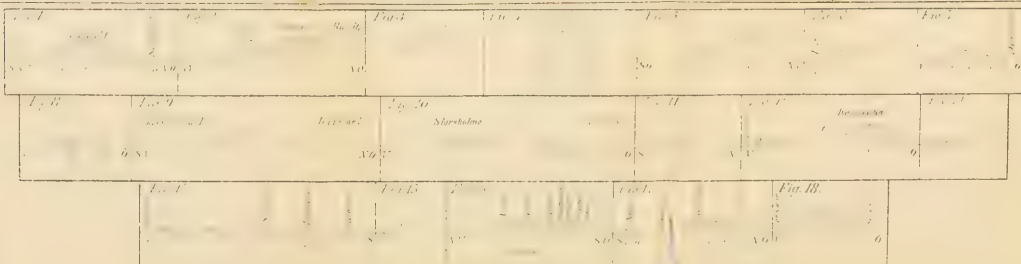
Karl Pettersen.

1882.



### Færværes Belydning

- Løse-Bedakninger (Sand, Mør)
- Trømsø glimmerskifer-gruppe.
- Dieldals-gruppen.  
Konglomerat.
- a gneis
- S Skulgams-gneisfjell  
b gneis-granit
- a gneis
- K høalsundels gneisfjell.  
b gneis-granit
- a gneis
- b aldre
- Granit (post lavastek)
- ..... Løse af Sverdrup og Nørgaard
- Højdekursene for høst 1882 (1:1000)
- Højdekurserne angivne i Fæm (1:1000)







u. Chemismus. Die Steppen-Brachswalbe. Der Lege-Apparat bei d. Insekten. Der Zentral-Verein für Handels- Geographie u. f. Förderung deutscher Interessen im Auslande zu Berlin. Die Kreide-Schichten am Untersberge bei Salzburg. Ueber d. Einfluss d. Lichtes auf d. Regions-Vertheilg. d. Meresthiere. Der Sirius u. sein Begleiter. Historisches u. Geologisches über d. Isthmus von Tehuantepec. Aus d. Leben d. Ameisen. Ueber die schwedische Kolonie Neu-Schweden. Aus d. chemischen Werkstätten d. Meissener Porzellan-Manufaktur. Die Verunreinigungen d. Wassers. Allerlei Mystik. Das Vorhandensein u. die Wirkung d. Elektrizität an d. Konkav-Flächen isolirter Leiter. Die Thomson'sche Expedition nach d. Tanganyika. Die Farben d. Blätter u. Bluthen. Die Respirations-Bewegungen d. Insekten. Die Furcht von den Gewittern. Unsere südeuropäische Kriechthiere mit besondr. Berücksichtg. ihrer Lebensweise. Der Kuli in Hongkong. Die Feld-Apotheke d. Fridrich's des Grossen. Die alkalischen Gewässer in der Umgebung von Zombor (Ungarn). Eine hamburgische wissenschaftl. Expedition in d. äquatoriale Ost-Afrika. Literatur Bericht. Geographische Mittheilungen, ornithologische, geologische, biographische, hortikulturist., naturwissenschaftl., meteorolog., paläontol., phytopatholog., museolog., zoologische, etholog., archäolog., botanische, chemische Mittheilgn. Naturwissensch. Lehrmittel. Briefwechsel. Kleinere Mitth. Anzeigen.

**Das Ausland.** Wochenschrift für Länder u. Völkerkunde, unter Mitwirkg. von Prof. Dr. Friedr. Ratzel u. a. Fachmänner hrsg. Jahrl. 52 Nr. à 20 S. 4to. Pris pr. Aarg. Kr. 30,80. Indh. Politisch- u. wirtschafts-geographische Rückblicke auf d. Jahr 1881. V. Basuto-Land und Natal. Legende von der Entstehung d. Sees Esen-am. Sklaverei u. Emanzipation auf Cuba. Finnland u. seine Nationalitätenfrage. Georg Ebers über alten Völkerverkehr im östl. Mittelmeer. Der Sklavenkrieg im ägypt. Sudan während d. Jahre 1878 u. 1879. Zur Geschichte d. Konquista. Australneger in Deutschland. Die Frage nach den Verwandtschaftsverhältnissen d. indogermanischen Sprachen. Die Dialektliteratur Neapels. Ueber d. Namen Dajak. Wissenschaftl. Ergebnisse der vierten Polarreise d. „Willem Barents“. Die Landbevölkerung der Bretagne. Politisch- u. wirtschafts-geogr. Rückblicke. Der gegenwärtige Stand der Nephritfrage. Dr. A. Penk's Arbeiten über die Schwankungen des Meeresspiegels. Die Kurischen Könige und Kreewingen. Ein preussischer Kolonisationsversuch in Kostarika. Der Walfischfang in Finnmarken. Sechs Monate in Oran. Die Pogge-Wissmansche Reise quer durch das südliche Kongogebiet. Ueber Afrikaforschung. Der Panschlavismus in der historischen Ethnographie. Ueber die Aufgabe d. wirthschaftl. Geographie. Jus primae noctis. Ein Beitrag zur Geschichte d. Sitten. Anaradhapura. Sage von d. Entstehung d. Mondsfinsternis bei d. Karatschai. Die meteorolog. Station auf d. Hochobir in Kärnten. Die Pogge-Wissmann'sche Reise quer durch das südliche Kongogebiet. Zur Geographie von Ost-Sibirien. Schiltberger-Studien. American Nervousness. Eigentümliche Besitzverhältnisse d. Salzseen an der französischen Mittelmeerküste. Kleinere Mittheilgn. Notizen. Litteratur.

---

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab udkommer med 1 Bind (4 Hefter) aarlig. Subscriptionsprisen er fastsat til 8 Kroner pr. Bind.

Syvende Binds fjerde Hefte indeholder følgende Afhandlinger:

**Elling Holst.** Ein Paar synthetische Methoden in der metrischen Geometrie mit Anwendungen.

**Karl Pettersen.** Bidrag til de norske kyststrøgs geologi med kart og profiltavle.

**Sophus Lie.** Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatten.

**Alb. Cammermeyer.**

---







3 2044 106 230 238



